МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ КРАСНОЯРСКОГО КРАЯ
КРАЕВОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«НОРИЛЬСКИЙ ТЕХНИКУМ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И СЕРВИСА»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Похабов Юрий Владимирович

для специальности:
09.02.07 Информационные системы программирования

Норильск, 2022

Составитель: Некипелова Е.Е. преподаватель математики

Учебное пособие составлено в соответствии с рабочей программой по дисциплине Теория вероятностей и математическая статистика включает в себя теоретический материал, план-конспект лекционного материала дисциплины, примеры, иллюстрирующие теоретический материал, задания для практической работы студентов. Предназначенные для студентов 2 курса специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Оглавление

Пояснительная записка

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» входит в математический и общий естественнонаучный цикл основной профессиональной образовательной программы и является частью программной подготовки специалистов среднего звена в соответствии с ФГОС СПО по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование».

Знания, полученные при изучении данной дисциплины, являются необходимыми при работе с компьютером, что в современном мире является неотъемлемой частью при получении профессионального образования и дальнейшей работы выпускников колледжа.

Основное назначение дисциплины ЕН.03 «Теория вероятностей и математическая статистика» в средних профессиональных образовательных организациях состоит в формировании у студентов общих компетенций. Содержание дисциплины предусматривает повторение и систематизацию знаний, полученных в средней общеобразовательной школе, формирование общих компетенций.

Практическое занятие – это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение обучающимися заданий самостоятельно и под руководством преподавателя. Дидактическая цель практических работ – формирование у обучающихся профессиональных и практических умений, необходимых для изучения последующих учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

Практическая работа 1. Подсчёт числа комбинаций

***Цели работы*:** приобрести навыки вычисления перестановок и размещений при решении вероятностных задач, приобрести навыки вычисления сочетаний при решении вероятностных задач.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные формулы комбинаторики, понятия упорядоченных и неупорядоченных выборок.

Ход работы

1. Изучить основные сведения.
2. Выполнить задания.
3. Ответить на контрольные вопросы.

Краткая теория и методические рекомендации

Сочетаниями из n (различных) элементов по k элементов называют комбинации, составленные из данных n элементов по k элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot \ n-k\ !}$$

Размещениями из n различных элементов по k элементов называют комбинации, составленные из данных n элементов по k элементов, которые различаются между собой либо самими элементами, либо их порядком

$$A_n^k = \frac{n!}{n-k\ !}$$

Свойства сочетаний:

$C_n^k = C_n^{n-k}$ (свойство симметрии)

$C_{n+л}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$ (свойство Паскаля)

Пример 1. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

Решение. Число способов равно числу размещений из 7 элементов по 4, т.е. равно A_7^4.

Получаем $A_7^4 = \frac{7!}{7-4\ !} = \frac{7!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$

Пример 2. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Решение. Цифра 5 обязана стоять на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Пример 3. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

Решение. Матчей состоится столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т.е. их число равно

$$C_{16}^{2} = \frac{16!}{2!\ \ 16-2\ !} = \frac{14! \cdot 15 \cdot 16}{2! \cdot 14!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$$

Практическая часть

1. Мама оставила Маше к чаю 3 конфеты: мишка, коровка, трюфель. Сколькими способами она может съесть конфеты?
2. В футбольном матче участвуют 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены медали?
3. Сколько различных 3-значных чисел можно составить из множества цифр {1, 2, 3, 4, 5} без повторений?
4. Составить для множества $\{a, b, c\}$ перестановки и определить их количество.
5. По результатам футбольного чемпионата две худшие команды выбывают во вторую лигу. Сколько существует способов перехода команд во вторую лигу, если общее количество команд 16?
6. Сколькими способами можно карточку спортлото «5 из 36». При игре в спортлото необходимо выбрать 5 крестиков из 36 клеток. Порядок расстановки не важен.
7. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «ЧИСЛО»?
8. Сколькими способами можно выбрать три различных краски из имеющихся пяти?

9. На первом этаже одиннадцатиэтажного дома в лифт вошли 3 человека. Сколькими способами пассажиры лифта могут распределиться по этажам этого дома?
10. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если любая цифра может повторяться несколько раз?
11. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?
12. В условиях задачи 6 определить, сколько существует вариантов распределения призов, если по всем номинациям установлены одинаковые призы?
13. Садовник должен в течение трех дней посадить 6 деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее одного дерева в день?
14. Сколько существует четырехзначных чисел (возможно, начинающихся с нуля), сумма цифр которых равна 5?
15. Сколькими способами можно разбить группу из 25 студентов на три подгруппы A, B и C по 6, 9 и 10 человек соответственно?
16. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5 и 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

Контрольные вопросы

1. Что называется перестановкой из n элементов? 2. Какой смысл имеет запись $n!$?
2. По какой формуле вычисляют число перестановок из n элементов? 4. Что называется размещением из n элементов по k?
3. По какой формуле вычисляют число размещений из n элементов по k?
4. Что называется сочетанием из n элементов по k?
5. По какой формуле вычисляют число сочетаний из n элементов по k?

Практическая работа 2. Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики

Цель работы: приобрести навыки применения комбинаторики при решении вероятностных задач.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** понятие случайного события, классическое определение вероятностей, формулу полной вероятности, формула Байеса.

Ход работы

1. Изучить основные сведения.
2. Выполнить задания.
3. Ответить на контрольные вопросы.

Краткая теория и методические рекомендации

Классическое определение вероятности: вероятность $P(A)$ события A равна отношению числа возможных результатов опыта (m), благоприятствующих событию A, к числу всех возможных результатов опыта (n)

$$P\ A\ = \frac{m}{n}$$

Пример 1. Подбрасывание игральной кости один раз. Событие A состоит в том, что выпавшее число очков – чётно. В этом случае $n = 6$ – число граней куба; $m = 3$ – число граней с чётными номерами; тогда

$$P\ A\ = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Пример 2. Подбрасывание симметричной монеты 2 раза. Событие A состоит в том, что выпало ровно 2 герба. В этом случае $n = 4$, так как

Ω = {ГГ, ГР, РГ, РР}; $m = 1$, так как A = {ГГ}. Тогда $P\ A\ = \frac{1}{4}$.

Пример 3. Вытягивание шара из урны, содержащей 2 белых и 3 чёрных шара. Событие A состоит в том, что вытянули чёрный шар. В этом случае

$n = 2 + 3 = 5$ (общее число шаров в урне), $m = 3$ (число чёрных шаров), тогда $P\ A\ = \frac{3}{5}$.

Пример 4. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры. Какова вероятность того, что он с первого раза наберёт эти цифры правильно, если он помнит, что они различны?

Решение. Обозначим A – событие, состоящее в том, что абонент, набрав произвольно две цифры, угадал их правильно. m – число правильных вариантов, очевидно, что $m = 1$.

n – число различных цифр, $n = A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!} = 9 \cdot 10 = 90$

Таким образом, $P\ A\ = \frac{m}{n} = \frac{1}{90}$.

Пример 5. Шесть шариков случайным образом располагаются в шести ящиках так, что для каждого шарика равновероятно попадание в любой ящик и в одном ящике может находиться несколько шариков. Какова вероятность того, что в каждом ящике окажется по одному шарику?

Решение. Событие A – в каждом ящике по одному шарику. m – число вариантов распределения шариков, при которых в каждый ящик попадает по одному шарику, $M = 6!$ (число способов переставить между собой 6 элементов). n – общее число вариантов $n = 66$ (так как каждый шарик может попасть в каждый из ящиков). В результате получаем

$$P\ A\ = \frac{m}{n} = \frac{6!}{6^6} = \frac{5!\cdot 6}{6^6} = \frac{5!}{6^5}$$

Пример 6. В урне 3 белых и 4 чёрных шара. Из урны вынимаются два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Обозначим A – событие, состоящее в появлении белых шаров;

n – число способов вытащить 2 шара из 7; $n = C_7^2$; m – число способов вытащить 2 белых шара из имеющихся 3 белых шаров; $m = C_3^2$

$$P\ A\ = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{2!\cdot 5!\cdot 3!}{7!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{3!}{7\cdot 6} = \frac{1}{7}$$

Вероятность противоположного события A определяется по формуле $P\ A\ = 1 - P(A)$.

Для несовместных событий вероятность суммы двух событий вычисляется по формуле $P\ A + B\ = P\ A\ + P(B)$.

Пример 7. Завод производит 85 % продукции первого сорта и 10 % – второго. Остальные изделия считаются браком. Какова вероятность, что взяв наудачу изделие, мы получим брак?

Решение.

$P = 1 - \ 0{,}85 + 0{,}1 \ = 0{,}05$

Вероятность суммы двух любых случайных событий равна

$$P\ A + B\ = P\ A\ + P\ B\ - P(AB)$$

Пример 8. Из 20 студентов 5 человек сдали на двойку экзамен по истории, 4 – по английскому языку, причём 3 студента получили двойки по обоим предметам. Каков процент студентов в группе, не имеющих двоек по этим предметам?

Решение.

$P = 1 - \ \frac{5}{20} + \frac{4}{20} - \frac{3}{20} \ = 0{,}7(70\%)$

Условной вероятностью события B при условии, что событие A произошло, называется $P\ \frac{B}{A}\ = \frac{P(AB)}{P(A)}$

Пример 9. В урне лежит N шаров, из них n белых. Из неё достают шар и, не кладя его обратно, достают ещё один. Чему равна вероятность того, что оба шара белые?

Решение. Обозначим A – событие, состоящее в том, что первым вынули белый шар, через B событие, состоящее в том, что первым вынули чёрный шар, а через C событие, состоящее в том, что вторым вынули белый шар; тогда

$$P\ A\ = \frac{n}{N};\ P\ B\ = \frac{N-n}{N};\ P\ CA\ = \frac{n-1}{N-1};\ P\ C\ B\ = \frac{n}{N-1};\ P\ AC$$

$$= P\ A\ \cdot P\ C\ A\ = \frac{n\ n-1}{N\ N-1}$$

Пример 10. Из 30 экзаменационных билетов студент подготовил только 25. Если он отказывается отвечать по первому взятому билету (которого он не знает), то ему разрешается взять второй. Определить вероятность того, что второй билет окажется счастливым.

Решение. Пусть событие ***A*** заключается в том, что первый вытащенный билет оказался для студента «плохим», а ***B*** – второй – «хорошим». Поскольку после

наступления события А один из «плохих» уже извлечён, то остаётся всего 29 билетов, из которых 25 студент знает. Отсюда искомая вероятность равна $P\ \frac{B}{A}\ = \frac{25}{29}$.

Вероятность произведения

$$P\ AB\ = P\ A\ \cdot P\ B\ A\ = P\ B\ \cdot P\ A\ B$$

Пример 11. По условиям предыдущего примера найти вероятность успешной сдачи экзамена, если для этого студент должен ответить на первый билет, или, не ответив на первый, обязательно ответить на второй.

Пусть события A и B заключаются в том, что соответственно первый и второй билеты «хорошие». Тогда $\boldsymbol{A}$ – появление «плохого» билета в первый раз. Экзамен будет сдан, если произойдёт событие $\boldsymbol{A}$, или одновременно $\boldsymbol{A}$ **и** $\boldsymbol{B}$. То есть искомое событие C – успешная сдача экзамена выражается следующим образом: $\boldsymbol{C = A + AB}$. Отсюда

$$P\ C\ = P\ A + AB\ = P\ A\ + P\ AB\ = P\ A\ + P\ A\ P\ \frac{B}{A}\ = \frac{25}{30} + \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{29} = 0{,}97$$

или

$$P\ C\ = 1 - P\ C\ = 1 - P\ A \cdot B\ = 1 - P\ A\ \cdot P\ \frac{A}{B}\ = 1 - \frac{5}{30} \cdot \frac{4}{29} = 0{,}977$$

Случайные события A и B назовём **независимыми**, если

$$P\ AB\ = P(A) \cdot P(B)$$

Пример 12. Рассмотрим предыдущий пример с урной, содержащей N шаров, из которых n белых, но изменим опыт: вынув шар, мы кладём его обратно и только затем вынимаем следующий. $\boldsymbol{A}$ – событие, состоящее в том, что первым вынули белый шар, $\boldsymbol{B}$ – событие, состоящее в том, что первым вынули чёрный шар, а $\boldsymbol{C}$ – событие, состоящее в том, что вторым вынули белый шар; тогда

$$P\ A\ = \frac{n}{N};\ P\ B\ = \frac{N-n}{N};\ P\ \frac{C}{A}\ = \frac{n}{N};\ P\ C\ B\ = \frac{n}{N}$$

$$P\ AC\ = P\ A\ \cdot P\ C\ A\ = \frac{n \cdot n}{N \cdot N} = P(A) \cdot P(C)$$

т.е. в этом случае события A и C независимы.

Пусть события $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ удовлетворяют условиям $H_i \cdot H_j = \emptyset$, если

$i \neq j$ **и** $\ \ {}_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

Такую совокупность называют **полной группой событий**.

Пусть интересующее нас событие A может наступить после реализации одного из H_i известны вероятности $P(H_i)$, $P\ A\ H_i$. В этом случае справедлива формула полной вероятности $P\ A\ =\ {}_{i=1}^{n} P\ H_i\ \cdot P\ A\ H_i$.

Пример 13. Литьё в болванках поступает из двух цехов: 70 % из первого и 30 % из второго. При этом продукция первого цеха имеет 10 % брака, а второго 20 %. Найти вероятность того, что одна взятая наугад болванка имеет дефект.

Решение

$P\ H_1\ = 0{,}7;\ P\ H_2\ = 0{,}3;\ P\ A\ H_1\ = 0{,}1;\ P\ A\ H_1\ = 0{,}2$

$P = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}13$ **(13% болванок B цехе дефектов).**

Пример 14. В урне лежит N шаров, из которых n белых. Достаём из неё (без возвращения) два шара. Какова вероятность, что второй шар белый?

Решение.

$H_1 -$ первый шар белый; $P\ H_1\ = \frac{n}{N}$; $H_2 -$ первый шар чёрный;

$$P\ H_2\ = \frac{N-n}{N}$$

A – второй шар чёрный; $P\ A\ H_1\ = \frac{n-1}{(N-1)}$; $P\ A\ H_2\ = \frac{n}{(N-1)}$

Формула Байеса

Предположим, что выполняются условия предыдущего пункта и дополнительно известно, что событие A произошло. Найдём вероятность того, что при этом была реализована гипотеза H_k. По определению условной вероятности

$$P\ H_k\ A\ = \frac{P\ H_k A}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P\ A\ H_k}{{}_{i=1}^{n} P\ H_i\ \cdot P\ A\ H_i}$$

Полученное соотношение – это **формула Байеса**. Она позволяет по известным (до проведения опыта) $p(H_i)$ и условным вероятностям $P(A|H_i)$ определить условную вероятность $P(H_i/A)$, которую называют *апостериорной* (то есть полученной при условии, что в результате опыта событие A уже произошло).

Пример 15. 30 % пациентов, поступивших в больницу, принадлежат первой социальной группе, 20 % – второй и 50 % – третьей. Вероятность заболевания туберкулёзом для представителя каждой социальной группы соответственно равна

0,02, 0,03 и 0,01. Проведённые анализы для случайно выбранного пациента показали наличие туберкулёза. Найти вероятность того, что это представитель третьей группы.

Решение. Пусть H_1, H_2, H_3 – гипотезы, заключающиеся в том, что пациент принадлежит соответственно первой, второй и третьей группам. Очевидно, что они образуют полную группу событий, причём $P(H_1) = 0{,}3$; $P(H_2) = 0{,}2$; $P(H_3) = 0{,}5$. По условию событие A, обнаружение туберкулёза у больного, произошло, причём условные вероятности по данным условия равны $P(A/H_1) = 0{,}02$; $P(A/H_2) = 0{,}03$; и $P(A/H_3) = 0{,}01$. Апостериорную вероятность $P(H_3/A)$ вычисляем по формуле Байеса:

$$P\ H_3\ A\ = \frac{P(H_3)\cdot P\ A\ H_3}{\sum_{i=1}^{n} P\ H_i\ \cdot P\ A\ H_i} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}01}{0{,}3\cdot 0{,}02 + 0{,}2\cdot 0{,}03 + 0{,}5\cdot 0{,}01} = \frac{5}{17}$$

Практическая часть

1. В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?
2. Преподаватель предлагает каждому из трех студентов задумать любое число от 1 до 10. Считая, что выбор каждым из студентов любого числа из заданных равновозможен, найти вероятность того, что у кого-то из них задуманные числа совпадут.
3. Найти вероятность того, что в 8-значном числе ровно 4 цифры совпадают, а остальные различны.
4. Шесть клиентов случайным образом обращаются в 5 фирм. Найти вероятность того, что хотя бы в одну фирму никто не обратится.
5. Пусть в урне имеется N шаров, из них M белых и $N - M$ черных. Из урны извлекается n шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно m белых шаров.
6. Точку наудачу бросили на отрезок [0; 2]. Какова вероятность ее попадания в отрезок [0,5; 1,4]?
7. Два лица A и B условились встретиться в определенном месте между 12 и

13 часами. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи лиц A и B, если приход каждого из них может произойти наудачу в течение указанного часа и моменты прихода независимы?

8. В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность, что пуговицы будут одноцветными?
9. Студент знает 14 вопросов программы из 20. В билете содержится 3 вопроса. Чему равна вероятность того, что студент ответит не менее чем на два вопроса из трех?
10. На пяти одинаковых карточках написаны буквы И, Л, О, С, Ч. Если перемешать их, и разложить наудачу в ряд четыре карточки, то вероятность получить слово СИЛА равна….
11. Для некоторой местности число пасмурных дней в июне равно шести. Найти вероятность p того, что 1 июня ясная погода.
12. Среди сотрудников фирмы 28 % знают английский язык, 30 % – немецкий, 42 % – французский; английский и немецкий – 8 %, английский и французский – 10 %, немецкий и французский – 5 %, все три языка – 3 %. Найти вероятность того, что случайно выбранный сотрудник фирмы:

а) знает английский или немецкий;

б) знает английский, немецкий или французский;

в) не знает ни один из перечисленных языков.

13. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – мальчик, если известно, что в семье есть дети обоего пола?
14. Мастер, имея 10 деталей, из которых 3 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?
15. В одном ящике 3 белых и 5 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 4 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.
16. Три экзаменатора принимают экзамен по некоторому предмету у группы в 30

человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй – 3 студентов, а третий – 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40 %, у второго – только 10 %, у третьего – 70 %. Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

17. Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы А, В, С. На долю фирмы А приходится 50 % общего объема поставок, В – 30 % и С – 20 %. Из практики известно, что среди поставляемых фирмой А деталей 10 % бракованных, фирмой В – 5 % и фирмой С – 6 %. Какова вероятность, что взятая наугад деталь окажется годной?

Контрольные вопросы

1. Какое событие называют достоверным?
2. Какое событие называют невозможным?
3. Дайте определение противоположных событий.
4. Сформулируйте классическое определение вероятности.
5. Чему равна вероятность достоверного события?
6. Чему равна вероятность невозможного события?
7. Условная вероятность.
8. Вероятность произведения двух событий.
9. Независимые события.
10. Полная группа событий.
11. Формула Байеса.

Практическая работа 3. Вычисление вероятностей сложных событий

Цель работы: научиться вычислять вероятности сложных событий.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные формулы комбинаторики, формулу Бернулли.

Ход работы

1. Изучить основные сведения.
2. Выполнить задания.
3. Ответить на контрольные вопросы.

Перед началом выполнения практической работы необходимо повторить следующие понятия:

- приведенная нормальная форма;
- дизъюктивная и конъюктивная нормальная формы.

Краткая теория и методические рекомендации

Сложным событием называется наблюдаемое событие, выраженное через другие наблюдаемые в том же опыте события с помощью допустимых алгебраических операций.

$$P\ AB\ = P\ \frac{B}{A}\ \cdot P\ A\ = P\ \frac{A}{B}\ \cdot P(B) \qquad (1)$$

Формула (1) позволяет находить вероятности совместного наступления события A и B в тех случаях, когда условная вероятность известна из дополнительных опытов или определена методом вспомогательного эксперимента.

Из (1) по индукции нетрудно получается формула умножения для произвольного числа событий

$$P\ A_1A_2 \dots A_n\ = P\ A_1\ P\ A_2/A_1\ \dots P(\frac{A_n}{A_1A_2} \dots A_{n-1})$$

Для вероятности наступления хотя бы одного из двух событий A и B справедлива следующая **формула сложения вероятностей**:

$$\mathrm{P\ A+B\ = P\ A\ + P\ B\ - P(AB)}$$

Если события $A_1 A_2 \dots A_n$независимы в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из них проще вычисляется не по формуле сложения, а с помощью **формулы умножения**:

$$P\ A_1 + A_2 + \dots + A_n\ = 1 - P\ A_1 + A_2 + \dots + A_n\ = 1 - P\ A_1\ P\ A_2\ \dots P\ A_n$$

Пример 1. В продукции предприятия брак составляет 5 % от общего объема выпускаемых изделий. Для контроля качества случайно отобрано 20 изделий. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одно бракованное.

Решение. Обозначим через A_i события $A_i =\ i - \text{е по счету отобранное изделие бракованное}\ ,\ \ i = 1, 2, \dots, 20$.

По условию вероятность того, что изделие в продукции предприятия является бракованным, равна $P\ A_i\ = 0{,}05$. Очевидно, что нас интересует событие $A_1 + A_2 + \dots + A_{20}$. В условиях стабильного технологического процесса производства можно считать, что события $A_1, A_2, \dots, A_{20}$ независимы в совокупности. Учитывая, что $P\ A_i\ = 1 - P\ A_i\ = 0{,}95$,

получаем $P\ A_1 + A_2 + \dots + A_{20}\ = 1 -\ \ {}_{i=1}^{20} P\ A_i\ = 1 - 0{,}95^{20} = 0{,}64$

Формула Бернулли

Верность P_n^m того, что в n **независимых испытаниях** некоторое случайное события A наступит ровно m **раз**, равна $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, где p – вероятность появления события A в каждом испытании; $q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A в каждом испытании.

Коэффициент C_n^m часто называют *биномиальным коэффициентом*.

Пример 2. Найти вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет 3 раза.

Решение. Сначала немного рассуждаем: всего проводится 10 повторных независимых испытаний. Сколькими способами можно выбрать 3 испытания, в которых выпадет орёл?

$C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$ способами.

Это что же получается – записывать 120 слагаемых, в каждом из которых 10 множителей?

Используем формулу Бернулли $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, в данном случае:

$n = 10$ – всего испытаний;

$m = 3$ – количество испытаний, в которых должен появиться орел;

$p = \frac{1}{2}$ – вероятность появления орла в каждом испытании;

$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ – вероятность появления решки в каждом испытании.

Таким образом

$$P_{10}^{3} = C_{10}^{3} p^{3} q^{7} = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{120}{1024} = 0{,}1171875$$

Вероятность того, что при 10 бросках монеты орел выпадет ровно 3 раза.

Практическая часть

1. Игральная кость брошена 6 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза выпадет «шестерка».
2. Монета бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не более чем 2 раза.
3. Аудитор обнаруживает финансовые нарушения у проверяемой фирмы с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что среди 4 фирм-нарушителей будет выявлено больше половины.
4. Монета подбрасывается 3 раза. Найти наиболее вероятное число успехов (выпадений герба).
5. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 0,1. Найти наивероятнейшее число заключенных договоров после 25 визитов.
6. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5 %. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность обнаружить ровно три бракованные детали? Какова вероятность обнаружить не меньше трех бракованных деталей?
7. Вероятность покупки при посещении клиентом магазина составляет p = 0,75. Найти вероятность того, что при 100 посещениях клиент совершит покупку ровно 80 раз.
8. Страховая компания заключила 40000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2 %. Найти вероятность,

что таких случаев будет не более 870.

9. Курс акции за день может подняться на 1 пункт с вероятностью 50 %, опуститься на 1 пункт с вероятностью 30 % и остаться неизменным с вероятностью 20 %. Найти вероятность того, что за 5 дней торгов курс поднимется на 2 пункта.
10. Монету бросают 8 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет не менее двух раз.
11. В семье шесть детей. Найти вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.
12. В каждом из 500 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что событие A происходит: точно 220 раз; меньше чем 240 и больше чем 180 раз.
13. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включены все моторы.
14. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Контрольные вопросы

1. Что называют полной группой события?
2. Дайте определение независимого события.
3. Дайте определение условной вероятности.
4. Дайте определение совместных событий.
5. Дайте определение несовместных событий.
6. Сформулируйте правило умножения вероятностей.
7. Сформулируйте правило умножения вероятностей.
8. Вероятности каких событий можно вычислять по формуле Бернулли?
9. Как записывается формула Бернулли?

Практическая работа 5. Построение закона распределения и функция распределения ДСВ. Вычисление основных числовых характеристик ДСВ

Цель работы: научиться вычислять основные числовые характеристики дискретных случайных величин.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** определение дискретной случайной величины, закон распределения и функции распределения ДСВ.

Ход работы

1. Изучить основные сведения.
2. Выполнить задания.
3. Ответить на контрольные вопросы.

Краткая теория и методические рекомендации

Случайная величина – величина, численное значение которой может меняться в зависимости от результата стохастического эксперимента.

Дискретной назовём случайную величину, возможные значения которой образуют конечное множество.

Законом распределения дискретной случайной величины называется правило, по которому каждому возможному значению x_i ставится в соответствие вероятность p_i, с которой случайная величина может принять это значение, причём $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Пример 1. Абитуриент сдаёт два вступительных экзамена: по математике и физике. Составить закон распределения случайной величины x, числа полученных пятёрок, если вероятность получения пятёрки по математике равна 0,8, а по физике – 0,6.

Решение. Обозначим A_1 и A_2 – события, заключающиеся в том, что и математика, и физика сданы на 5. Очевидно, возможные значения x есть 0, 1, 2, причём

$p\ x = 0\ = p\ A_1 \cdot A_2\ = p\ A_1\ \cdot p\ A_2\ = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08;$

$p\ x = 1\ = p\ A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2\ = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0.2 \cdot 0{,}6 = 0{,}44$

$p\ x = 2\ = p\ A_1 \cdot A_2\ = p\ A_1\ \cdot p\ A_2\ = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$

Полученные результаты сведем в таблицу:

x_i	0	1	2
p_i	0,08	0,44	0,48

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}08 + 0{,}44 + 0{,}48 = 1$$

К важнейшим числовым характеристикам случайной величины относятся математическое ожидание и дисперсия.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины *x* называется произведение всех её возможных значений на их вероятности:

$$M\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Свойства математического ожидания:

– математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M\ C = C$$

– постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M\ Cx = CM\ x$$

– математическое ожидание суммы случайных величины равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} M\ x_i$$

– математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = M\ x_1 \cdot M\ x_2 \cdot \ldots \cdot M\ x_n$$

Дисперсией случайной величины x называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$D\ x = M\ \ x - M\ X\ ^2$ или $D\ x = M\ x^2 - M\ x\ ^2$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(x)}$

– дисперсия постоянной равна нулю:

$$D\ C\ = 0$$

– постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D\ Cx\ = C^2 D\ x$$

– дисперсия суммы (разности) случайных величины равно сумме дисперсий слагаемых:

$$D \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, D(x_i)$$

Свойства среднеквадратического отклонения:

- $\sigma\ C\ = 0$
- $\sigma\ Cx\ = C\ \cdot \sigma(x)$

Пример 2. Закон распределения случайной величины задан таблично. Найти $p\ x < 2$, $p\ x > 4$, $p(2 \le x \le 4)$, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Решение

$p\ x < 2\ = 0{,}1$

$p\ x > 4\ = 0{,}1$

$p\ 2 \le x \le 4\ = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}8$

$M\ x\ = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}1 = 3$

$D\ x\ = 12 \cdot 0{,}1 + 22 \cdot 0{,}2 + 32 \cdot 0{,}4 + 42 \cdot 0{,}2 + 52 \cdot 0{,}1 - 32 = 1{,}2$

$\sigma\ x\ = \sqrt{1{,}2} = 1{,}095$

Пример 3. Фермер считает, что, принимая во внимание различные потери и колебания цен, он сможет выручить не более 60 центов за десяток яиц и потерять не более 20 центов за десяток и что вероятности возможных выигрышей и потерь таковы:

Цена за 10 яиц	0,6	0,4	0,2	0	-0,2
P	0,2	0,5	0,2	0,06	0,04

Как оценить ожидаемую прибыль от продажи десятка яиц; от ожидаемых им в этом году 10000 яиц?

Решение

x – случайная, прибыль от продажи 10 яиц

$$M\ x\ = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}06 - 0{,}2 \cdot 0{,}04 = 0{,}352$$

$$M\ 10000x\ = 10000 \cdot 0{,}352 = 3520\$$$

$$D\ x\ = 0{,}62 \cdot 0{,}2 + 0{,}42 \cdot 0{,}5 + 0{,}22 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}06 + \ -0{,}2\ \cdot 0{,}04 - 0{,}3522$$

$$= 0{,}037696$$

$$\sigma\ x\ = \ \overline{0{,}037696} = 0{,}194154578$$

$$D\ 10000x\ = 10000^2 \cdot D\ x\ = 19415457{,}76$$

$$\sigma\ x\ = \ \overline{0{,}194154578} = 0{,}441$$

Практическая часть

1. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	1	4	7	9
P	0,1	0,6	0,2	0,1

2. В партии из шести деталей имеется четыре стандартные. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

3. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,3. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

4. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения.

X	3	4	5	6	7
P	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

Найти вероятности p_1 и p_3, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1.

5. Монету подбрасывают пять раз. Составить закон распределения случайной величины X – числа выпадения герба.

6. Производится три выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0,7$; $p_2 = 0,8$ и $p_3 = 0,6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

7. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

8. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем x_1меньше x_2. Найти x_1 и x_2, зная, что $M(X) = 2,7$ и $D(X) = 0,21$.

9. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: $x_1 = 6$ с вероятностью $p_1 = 0,5$, $x_2 = 4$ с вероятностью $p_2 = 0,3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $M(X) = 12$.

10. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины, заданной законом распределения.

Y	2	4	5	6
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Контрольные вопросы:

1 . Дайте определение дискретной случайной величины.
2. Дайте определение непрерывной случайной величины.
3. Дайте определение закона распределения дискретной случайной величины.
4. Дайте определение многоугольника распределения дискретной случайной величины.
5. Формула биномиального распределения.
6. Дайте определение математического ожидания случайной величины.
7. Что называется дисперсией случайной величины?
8. Запишите формулу вычисления математического ожидания случайной

величины.

9. Запишите формулу вычисления дисперсии случайной величины.
10. Свойства математического ожидания случайной величины.
11. Свойства дисперсии случайной величины.
12. Дайте определение среднего квадратического отклонения.
13. Запишите формулу вычисления среднего квадратического отклонения.
14. Способы задания закона распределения дискретной случайной величины.
15. Определение биномиального закона распределения.
16. Формула биноминального закона распределения дискретной случайной величины.

Практическая работа 6. Вычисление числовых характеристик НСВ. Построение функции плотности и интегральной функции распределения

Цель работы: решение задач на вычисление числовых характеристик непрерывной случайной величины.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** понятие НСВ, способы нахождения ее числовых характеристик.

Ход работы

1. Изучить основные сведения.
2. Выполнить задания.
3. Ответить на контрольные вопросы.

Краткая теория и методические рекомендации

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина X, если ее функция распределения (интегральная функция распределения) представима в виде

$$F\ x\ = \int_{-\infty}^{x} f\ t\ dt$$

где $f\ x$ – некоторая неотрицательная функция, такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\ x\ dx = 1$$

Функция $f(x)$ называется ***плотностью распределения вероятностей случайной величины*** X (дифференциальной функцией распределения).

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X принимает значение в заданном промежутке, вычисляется следующим образом:

$$P\ a \le x \le b\ = \int_{a}^{b} f\ x\ dx = F\ b\ - F(a)$$

Примеры распределений вероятностей непрерывной случайной величины X:

- равномерное распределение вероятностей непрерывной случайной величины;
- показательное распределение вероятностей непрерывной случайной величины;
- нормальное распределение вероятностей непрерывной случайной величины.

При решении задач широко используют числовые характеристики непрерывных случайных величин (таблица 1).

Таблица 1. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Числовая характеристика	Обозначение и формула
Математическое ожидание непрерывной случайной величины	$M\ X\ = \int_{-\infty}^{+\infty} xf\ x\ dx$
Если все возможные значения X принадлежат интервалу a, b , то математическое ожидание вычисляют	$M\ X\ = \int_{a}^{b} xf\ x\ dx$
иначе	$D\ X\ = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f\ x\ dx - M(X)\ ^2$
Если все возможные значения X принадлежат интервалу a, b , то дисперсию вычисляют	$D\ X\ = \int_{-\infty}^{+\infty} x - M\ X\ ^2 f\ x\ dx$
иначе	$D\ X\ = \int_{a}^{b} x^2 f\ x\ dx - M(X)\ ^2$
Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X	$\sigma\ X\ = \sqrt{D(X)}$

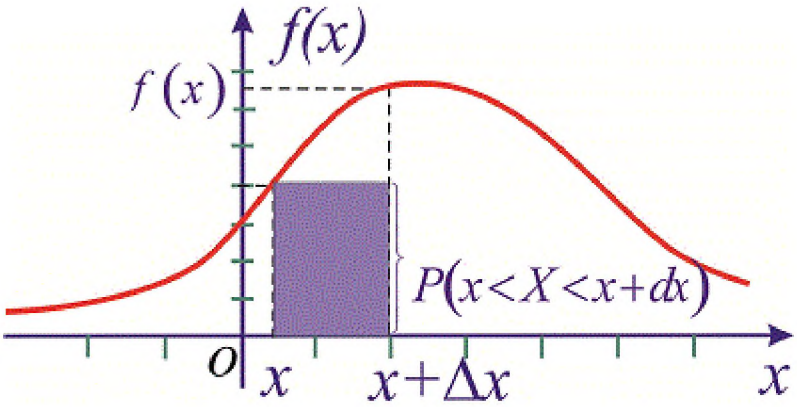
Для непрерывных случайных величин наряду с законом распределения вероятностей рассматривают плотность вероятностей, которую обозначают так $f\ x$.

Плотностью вероятностей случайной величины X называют первую производную от интегральной функции распределения вероятностей $F(x)$:

$$f\ x\ = \lim_{\Delta \to 0} \frac{F\ x + \Delta x\ - F\ x}{\Delta x} = F'\ x\ = \frac{dF\ x}{dx}$$

откуда дифференциал $dF\ x\ = f\ x\ dx$

Геометрически на графике плотности вероятностей $f\ x\ dx$ соответствует площадь прямоугольника с основанием dx и высотой $f\ x$.



Свойства плотности вероятностей

1. Плотность вероятностей принимает положительные значения $f\ x\ \geq 0$. Это свойство следует из определения первой производной от функции распределения $F\ x$, которая в свою очередь является неубывающей функцией.
2. Условие нормирования случайной величины X

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\ x\ dx = 1$$

3. Вероятность попадания случайной величины в промежуток $\alpha; \beta$ определяется зависимостью

$$P\ \alpha < X < \beta\ = \int_{\alpha}^{\beta} f\ x\ dx$$

4. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины определяется через плотность распределения вероятностей интегрированием

$$F\ x\ = \int_{-\infty}^{x} f\ x\ dx$$

Пример 1. Закон распределения случайной величины X заданы функцией

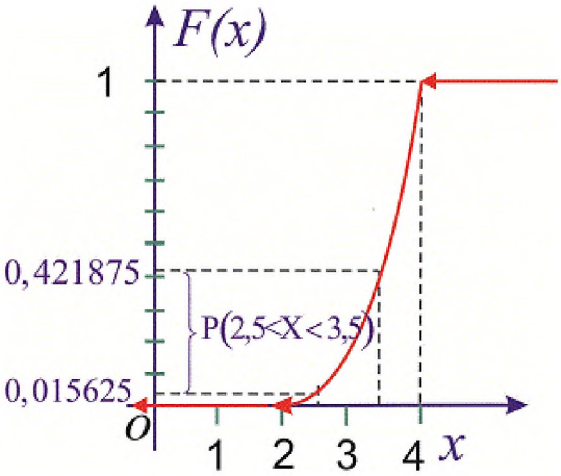
$$F\ x\ = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \dfrac{x-2\ ^3}{8} & 2 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

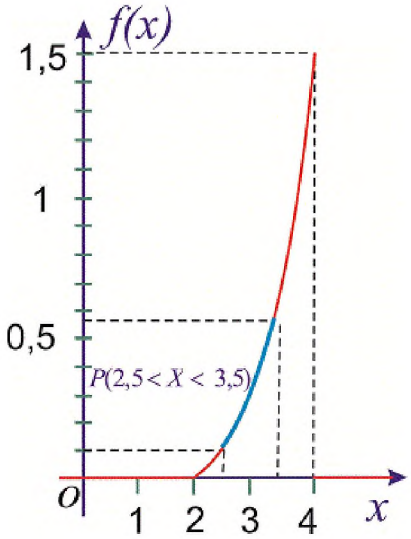
Найти плотность распределения вероятностей $f\ x$ и построить графики обеих функций $f\ x$, $F\ x$. Вычислить вероятность того, что случайная величина принадлежит промежутку $P\ 2{,}5 < X < 3{,}5$.

Решение. Вычисляем функцию плотности вероятностей

$$f\ x\ = F'\ x\ = \begin{matrix} 0, & x \le 2 \\ \frac{3}{8}\ x-2\ ^2 & 2 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{matrix}$$

Графики функций $f\ x$, $F\ x$ изображены на рисунках





Вероятность события $2{,}5 < X < 3{,}5$ вычислим по формуле

$$P\ 2{,}5 < X < 3{,}5\ = F\ 3{,}5\ - F\ 2{,}5\ = \frac{1{,}5^3}{8} - \frac{0{,}5^3}{8} = 0{,}40625$$

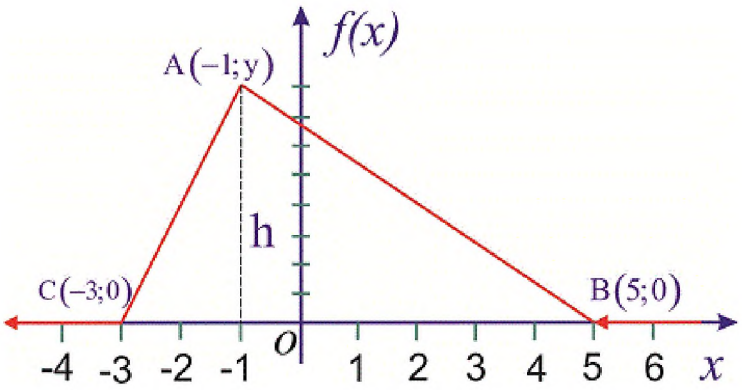
Согласно приведенной выше формуле, получим

$$P\ 2{,}5 < X < 3{,}5\ = \int_{2{,}5}^{3{,}5} f\ x\ dx = \int_{2{,}5}^{3{,}5} \frac{3}{8}\ x-2\ ^2 dx = \frac{3}{8}\frac{x-2\ ^3}{3} \quad = 0{,}40625$$

На этом задача решена.

Пример 2. Случайная величина X имеет закон распределения вероятностей в

виде треугольника.



Записать выражения для плотности вероятностей и функции распределения вероятностей, построить график $F\ x$ и вычислить $P\ 0 < X < 3$.

Решение. На промежутках $-3;-1$ и $-1;5$ плотность вероятностей меняется по линейному закону вида

$f\ x\ = k_1 x + b_1;\ \ k_1 > 0$

$f\ x\ = k_2 x + b_2;\ \ k_2 > 0$

для первого и второго участка, соответственно. Для нахождения неизвестных констант k_1, b_1, k_2, b_2 установим ординаты вершины треугольника $A\ -1; y$. Используем условие нормирования, согласно которому площадь треугольника $\Delta\, ABC$ равна единице:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2}\ \ 5 -\ \ -3\ \ \ y = 1\ \Rightarrow y = \frac{1}{4}; A(-1; 0{,}25).$

При известных координатах всех вершин находим уравнение прямых

$$AC: A\ -1; 0{,}25\ , C\ -3; 0\ , \qquad \frac{y - C_y}{x - C_x} = \frac{A_y - C_y}{A_x - C_x}$$

$$\frac{y - 0}{x + 3} = \frac{0{,}25 - 0}{-1 + 3} \Rightarrow y = \frac{1}{8}\ x + 3$$

$$AB: A\ -1; 0{,}25\ , B\ 5; 0\ , \qquad \frac{y - B_y}{x - B_x} = \frac{A_y - B_y}{A_x - B_x}$$

$$\frac{y - 0}{x - 5} = \frac{0{,}25 - 0}{-1 - 5} \Rightarrow y = -\frac{1}{24}\ x - 5$$

Есть другой способ нахождения уравнения прямых, предусматривающий отыскания по одной константе на уравнение. Если известна точка пересечения прямой с осью ординат Ox, то уравнение прямой, которая через эту точку

проходит, следующее:

$$y = a\ x - x_0$$

где x_0 – ордината пересечения с осью Ox. Подстановкой второй точки прямой находят неизвестную константу a. Для заданных точек получим

$$AC: A\ \ -1; \frac{1}{4}\ \ , C\ \ -3; 0\ \ , y = a\ \ x - \ \ -3\ \ \ \ = a\ \ x + 3\ \ ;$$

$$\frac{1}{4} = a\ \ -1 + 3\ \ \Rightarrow a = \frac{1}{8}, y = \frac{1}{8}\ \ x + 3\ \ .$$

$$BC: A\ \ -1; \frac{1}{4}\ \ , B\ \ 5; 0\ \ , y = a\ \ x - 5\ \ ;$$

$$\frac{1}{4} = a\ \ -1 - 5\ \ \Rightarrow a = -\frac{1}{24}, y = -\frac{1}{24}\ \ x - 5\ \ .$$

Со временем второй метод для Вас станет проще и практичнее в использовании. Плотность вероятностей примет значение

$$f\ \ x\ \ = \frac{x + 3}{8};\ \ f\ \ x\ \ = \frac{5 - x}{24}$$

а ее функция примет вид

$$f\ \ x\ \ = \begin{matrix} 0, & x \le -3; \\ \frac{x + 3}{8}, & -3 < x \le -1; \\ \frac{5 - x}{24}, & -1 < x \le 5; \\ 0, & x > 5 \end{matrix}$$

Функцию распределения вероятностей $F\ \ x$ находим интегрированием:

1. на промежутке $-3; -1$:

$$F\ \ x\ \ = \int_{-3}^{x} f\ \ x\ \ dx = \frac{1}{8} \int_{-3}^{x} x + 3\ \ dx = \frac{x + 3\ \ ^2}{16}\Big|_{-3}^{x} = \frac{x + 3\ \ ^2}{16}$$

2. на промежутке $-1; 5$

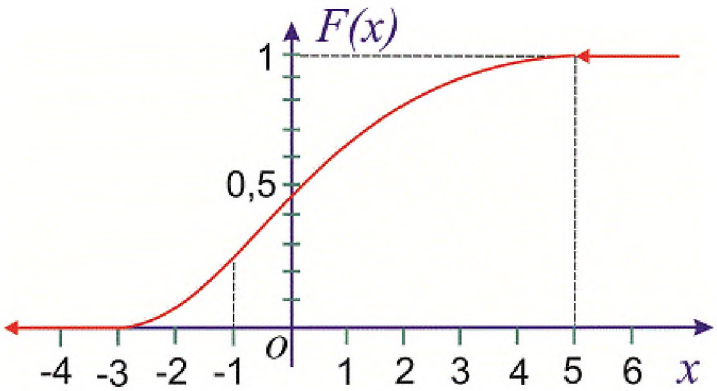
$$F\ \ x\ \ = F\ \ -1\ \ + \int_{-1}^{x} \frac{5 - x}{24} dx = \frac{-1 + 3\ \ ^2}{16} - \frac{1}{24} \int_{-1}^{x} x - 5\ \ dx$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{24} \quad x-5\ ^{2} \quad {}^{x}_{-1} = \frac{1}{4} - \frac{x-5\ ^{2}}{24} + \frac{3}{4} = 1 - \frac{x-5\ ^{2}}{48}$$

Следовательно, функция распределения вероятностей такая:

$$f\ x\ = \begin{cases} 0, & x \le -3; \\ \dfrac{x+3\ ^{2}}{16}, & -3 < x \le -1; \\ 1 - \dfrac{x-5\ ^{2}}{48}, & -1 < x \le 5; \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Ее график приведен ниже.



Вычисляем вероятность события $P\ \ 0 < x < 3$ согласно формуле

$$P\ \ 0 < X < 3\ \ = P\ \ 0 < X < -1\ \ + P\ \ -1 < X < 3$$

или

$$F\ \ -1\ \ - F\ \ -2\ \ + F\ \ 3\ \ - F\ \ -1\ \ = F\ \ 3\ \ - F\ \ -2\ \ = \ \ 1 - \frac{2^2}{48}\ \ - 0 = \frac{11}{12}$$

Следовательно, вероятность равна

$$P\ \ 0 < X < 3\ \ = \frac{11}{12}$$

Практическая часть

1. Автобусы маршрута № 875 идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее трех минут.
2. Найти математическое ожидание случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2; 8).
3. Найти дисперсию случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (4; 12).
4. Найти среднеквадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (1; 5).
5. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения $f(x) = 1$ на интервале (0;1).
6. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $\boldsymbol{X}$, заданной функцией распределения $\boldsymbol{F\ x\ =}$
$$\begin{array}{ll} \mathbf{0} & \textbf{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x & \textbf{при } 0 < x \leq 4 \\ \mathbf{1} & \textbf{при } x > 4 \end{array}$$
7. Случайная величина X в интервале (2; 4) задана плотностью распределения $f(x) = -0{,}75x^2 + + 4{,}5x - 6$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду величины X.
8. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения
$$\boldsymbol{F\ x\ =} \begin{array}{ll} \mathbf{0} & \textbf{при } x \leq 0 \\ 5x^2 - 1 & \textbf{при } 0 < x \leq 1 \\ x & \textbf{при } x > 1 \end{array}$$
9. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале (0; 2); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.
10. По заданной функцией плотности распределения вероятностей

$$f\ x\ =\ \begin{matrix} 0 & \text{при } x \le -4 \\ 5x^2 - 1 & \text{при } -4 < x \le 5 \\ x & \text{при } x > 5 \end{matrix}$$

установить параметры a и функцию распределения вероятностей $F\ x$. Построить графики функций $F\ x\ ,\ f(x)$.

Контрольные вопросы

1. Какой формулой задается плотность равномерного распределения?
2. Дайте определение равномерного распределения вероятности.
3. Что вы знаете о функции распределения случайной величины, распределенной по равномерному закону?
4. Дайте определение математического ожидания случайной величины, распределенной по равномерному закону. Запишите ее формулу.
5. Дайте определение дисперсии случайной величины, распределенной по равномерному закону. Запишите ее формулу.
6. Дайте определение математического ожидания непрерывной случайной величины.
7. Дайте определение дисперсии непрерывной случайной величины.
8. Дайте определение среднего квадратического отклонения непрерывной случайной величины.
9. Дайте определение моды.
10. Дайте определение начального момента.
11. Запишите формулы вычисления моды и начального момента.

Практическая работа 7.Построение эмпирической функции распределения. Вычисление числовых характеристик выборки. Точечные и интервальные оценки

Цель работы: уметь строить эмпирическую функцию распределения, научиться вычислять числовые характеристики выборки, точечные и интервальные оценки.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** понятие эмпирической функции распределения, числовые характеристики выборки, точечные и интервальные оценки.

Ход работы

1. Изучить основные сведения.
2. Выполнить задания.
3. Ответить на контрольные вопросы.

Часть 1. Подготовить доклад на тему «Построение эмпирической функции распределения».

Часть 2. Выполнение письменной работы на тему «Вычисление числовых характеристик выборки, точечные и интервальные оценки».

Время выполнения: 2 часа.

Краткая теория и методические рекомендации

Из генеральной совокупности извлечена выборка дискретной случайной величины объема n:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	....	x_n
m_i	m_1	m_2	m_3	m_4	....	m_n

Числовые характеристики выборки:

1) ***выборочное среднее***:

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$$

2) ***выборочная дисперсия***:

$$D = X^2 - X^{\ 2}$$

где

$$X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i$$

3) ***выборочное среднее квадратическое отклонение:***

$$\sigma = \sqrt{D}$$

Результаты испытаний могут представлять собой выборку значений из дискретной или непрерывной случайной величины. Так, число дефектных изделий в партии, – дискретная случайная величина, поскольку это может быть только целое число. Непрерывная случайная величина может принимать любое значение в некотором интервале, конечном или бесконечном (например, непрозрачность бумаги). При испытаниях часто получают выборку значений непрерывной случайной величины с некоторым распределением вероятности получения тех или иных значений (точнее, интервалов значений). Часто встречается нормальное распределение. Точнее, реальные распределения часто бывают достаточно близки к нормальному.

Параметры нормального распределения – математическое ожидание M и генеральное среднеквадратическое отклонение (СКО) σ (или генеральная дисперсия σ^2). Математическое ожидание – это центр группировки результатов испытаний. При отсутствии систематических погрешностей соответствует количественной характеристике объекта испытаний. Дисперсия (или СКО) – мера рассеяния результатов.

Найти значения параметров абсолютно точно невозможно. Но при объёме выборки n 25…30 и более обычно считают, что с достаточной точностью точечные оценки параметров равны параметрам. Кроме того, можно достаточно точно рассчитать генеральную дисперсию при проведении серий испытаний, в которых генеральная дисперсия не меняется (такой расчёт называется вычислением дисперсии по текущим измерениям), например, такой расчёт бывает возможен при приёмо-сдаточных испытаниях.

Применяется также мера рассеяния, называемая коэффициентом вариации. Генеральный коэффициент вариации $\gamma = \frac{\sigma}{M}$

Выборочный коэффициент вариации $\nu = \frac{s}{x}$

Точечная оценка математического ожидания – среднее значение выборки x (в Excel рассчитывается по функции СРЗНАЧ): $x = \frac{1}{n} \quad {}_{i=1}^{n} x_i$

Точечная оценка генеральной дисперсии – выборочная дисперсия (в Excel находят по функции ДИСП): $s^2 = \frac{1}{n-1} \quad {}_{i=1}^{n}(x_i - x)^2$

По текущим измерениям дисперсию находят так:

$$s^2 = \frac{{}_{i=1}^{m}(n_i - 1){s_i}^2}{{}_{i=1}^{m} n_i - m}$$

Здесь n_i – объем испытаний (иначе говоря, объём выборки) в каждой серии, s_i^2 – дисперсии в соответствующих сериях, *m* – количество серий.

Оценка генерального СКО – выборочное СКО (в MS Excel рассчитывается по функции СТАНДОТКЛОН):

$$s = \overline{s^2} = \overline{\frac{{}_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}{n-1}}$$

Точечные оценки малоинформативны, поскольку это случайные величины, и они могут заметно отличаться от оцениваемого параметра. Для повышения информативности используют интервальные оценки (рассчитывают доверительные интервалы).

Если генеральная дисперсия σ^2 известна достаточно точно, доверительный интервал для математического ожидания находят так:

$$x - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\overline{n}} =< M =< x + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\overline{n}}$$

или

$$M = x \pm \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\overline{n}}$$

Здесь уровень значимости $\alpha = 1 - P$ (P – доверительная вероятность), $z_1 - \frac{\alpha}{2}$ – квантиль стандартного нормального распределения (рассчитывается по функции НОРМСТОБР), *n* – объём испытаний.

Если генеральная дисперсия неизвестна, доверительный интервал для

математического ожидания находят так:

$$x - \frac{t_{\alpha,k} s}{\sqrt{n}} =< M =< x + \frac{t_{\alpha,k} s}{\sqrt{n}}$$

Здесь $t_{\alpha,k}$ – коэффициент Стьюдента (рассчитывается с использованием функции СТЬЮДРАСПОБР), $k = n - 1$ – число степеней свободы. Для дисперсии доверительный интервал определяют из соотношения:

$$\frac{ks^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},k}} <= \sigma^2 \leq \frac{ks^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},k}}$$

Здесь χ^2 – критерий распределения хи-квадрат (в Excel функция ХИ2ОБР), $k = n - 1$ – число степеней свободы.

Извлекая квадратный корень из всех частей неравенства, получаем интервальную оценку СКО.

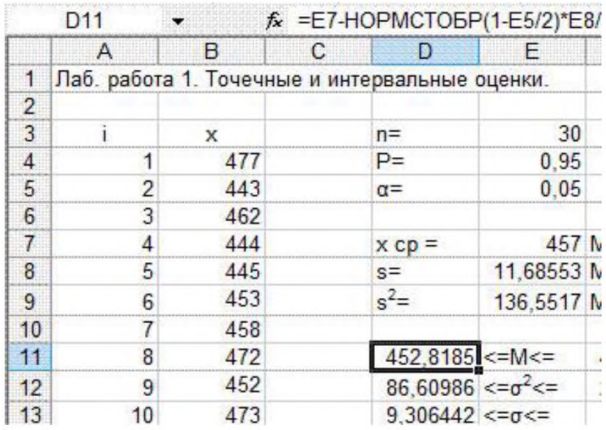
Пример. **1.1**. Проведены испытания образцов дюралюминиевого профиля на разрыв. Полученные значения предела прочности образцов (МПа) приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

477	443	462	444	445	453	458	472	452	473
448	471	459	436	460	466	465	434	466	468
456	462	458	478	446	452	451	446	447	462

Найти точечные и интервальные оценки параметров распределения предела прочности при доверительной вероятности 0,95.

Фрагмент выполнения примера 1.1 показан на рисунке 1.1.



D11 fx =E7-НОРМСТОБР(1-E5/2)*E8/

	A	B	C	D	E
1	Лаб. работа 1. Точечные и интервальные оценки.				
2					
3	i	x		n=	30
4	1	477		P=	0,95
5	2	443		α=	0,05
6	3	462			
7	4	444		x ср =	457
8	5	445		s=	11,68553
9	6	453		s^2=	136,5517
10	7	458			
11	8	472		452,8185	<=M<=
12	9	452		86,60986	<=σ^2<=
13	10	473		9,306442	<=σ<=

Рисунок 1.1. Фрагмент расчёта для примера 1.1

В ячейки B4:B33 вводим значения предела прочности, в ячейки A4:A33 номера соответствующих данных. В ячейке E3 рассчитываем объём испытаний (объём выборки) функцией СЧЁТ. При этом в диалоговом окне функции СЧЁТ в строке Значение 1 вводим интервал от B4 примерно до B1000 (не до B33). Это необходимо для того, чтобы электронная таблица была пересчитываема, т.е. при последующем введении других данных в другом количестве (большем или меньшем) все расчётные значения автоматически пересчитывались бы для этих новых данных. Так следует поступать и при использовании других функций.

В ячейку E4 вводим значение доверительной вероятности. В ячейке E5 рассчитываем уровень значимости (но не вводим в виде числа, чтобы при другой доверительной вероятности таблица автоматически пересчитывалась).

В ячейках E7, E8 и E9 соответственно рассчитываем среднее значение предела прочности, его СКО и дисперсию по соответствующим статистическим формулам (поставьте размерности). В ячейках D11:D13 и F11:F13 рассчитываем соответственно нижние и верхние границы доверительных интервалов для математического ожидания, дисперсии и СКО. При этом, учитывая, что объём испытаний достаточно велик, т.е. σ примерно равно s, доверительный интервал для математического ожидания рассчитываем по формуле (1.3). При получении значений z и χ^2 в диалоговых окнах функций НОРМСТОБР и ХИ2ОБР значения вероятностей следует получать расчётом со ссылками на ячейку, в которой указано значение α, а не вводить в виде чисел, чтобы таблица была пересчитываемой. (Внимание! Адреса ячеек вводить в формулы и строки диалоговых окон надо кликом на эти ячейки, а не с клавиатуры, поскольку ввод с клавиатуры замедляет работу и повышает вероятность ошибок.)

Примечания:

1. Доверительный интервал можно вычислить также по статистической функции ДОВЕРИТ.

2. Чтобы ввести в ячейке часть текста в виде верхнего или нижнего индекса, следует в строке формул выделить необходимую часть текста, затем задать для

неё верхний индекс командой Формат – Ячейки и отметкой в диалоговом окне Верхний индекс.

Практическая часть

1. Для выборки 7,–7,2,7,7,5,5,7,5,–7 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в) статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж) выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.
2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	10–15	2
2	15–20	4
3	20–25	8
4	25–30	4
5	30–35	2

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

3. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины $\boldsymbol{X}$, соответственно, равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания $\boldsymbol{X}$, примет значение, заключенное в интервале $\mathbf{12;14}$.
4. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному при $\boldsymbol{x \geq 0}$ плотностью распределения $\boldsymbol{f\ x\ = 0{,}04e^{-0{,}04x}}$; при $x < 0$ функция $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (1;2).
5. Случайная величина X задана плотностью распределения $u(x) = 3x^2$ в интервале (0, 2); вне этого интервала $u(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.
6. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения на отрезке [0; 1]: $f(x) = 1$, $\boldsymbol{x \in\ \ 0;1}$.
7. Написать плотность вероятности нормально распределенной случайной величины $\boldsymbol{X}$, зная, что $M(X) = 6$, $D(X) = 32$.
8. 1) выполнить расчёты по примеру 1.1. Как изменяются доверительные интервалы (увеличиваются или уменьшаются) при уменьшении

доверительной вероятности? 2) найти точечные и интервальные оценки математического ожидания, дисперсии и СКО некоторой характеристики (таблица 1.2), выборка из которой получена по результатам испытаний; 3) по испытаниям выборок из четырёх партий бумаги получены значения разрывной длины образцов бумаги, представленные в таблице 1.3. Определить дисперсию по результатам испытаний всех партий (по текущим измерениям), учитывая, что генеральная дисперсия в разных партиях не меняется. Для партии 4 найти доверительный интервал для математического ожидания, используя рассчитанную дисперсию как генеральную, при доверительной вероятности 0,9.

Таблица 1.2

Вариан	*P*	Значения характеристики									
1	0,95	15,9	18,3	16,5	17,9	16,3	18,2	16,9	17,6	16,0	16,5
2	0,90	7,41	7,50	7,25	7,63	7,55	7,66	7,43	7,38	–	–
3	0,99	79	64	63	74	60	71	68	76	65	–
4	0,98	53,	53,	54,	54,	56,	54,	56,	55,	55,	54,
5	0,97	831	832	815	823	843	825	818	841	837	–
6	0,95	5,6	5,7	5,8	5,4	5,9	5,6	5,5	5,7	5,5	5,7
7	0,90	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	–	–
8	0,99	8,5	8,7	8,3	8,7	8,7	8,9	8,4	8,9	9,0	8,6
9	0,98	7,3	7,3	7,3	7,2	7,4	7,2	7,1	7,4	–	–
10	0,97	7,5	6,4	6,3	7,3	6,9	7,1	6,8	7,5	6,5	6,7

Таблица 1.3

Партия	Номер образца									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Разрывная длина, м									
1	3750	3720	3800	3790	3950	3820	3870	3870	3850	3810
2	3830	3810	3880	3890	4030	3860	4000	3950	3930	3890
3	3860	3840	3910	3930	4080	3900	4010	3980	–	–
4	3690	3680	3720	3720	3850	3740	3790	3790	3770	–

Контрольные вопросы

1. Дайте определение вариационного ряда.
2. Что называется, размахом выборки?
3. Как для данной выборки получают статистический ряд и выборочное распределение?
4. Какие графические изображения выборок вы знаете?

5. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?
6. Дайте определение выборочного среднего.
7. Дайте определение выборочной дисперсии.
8. Как связаны между собой выборочная дисперсия и несмещенная выборочная дисперсия?
9. Дайте определение нормального распределения вероятности.
10. Какой формулой задаётся плотность нормального распределения вероятности?
11. По какой формуле вычисляется вероятность случайной величины X, принадлежащей интервалу $(a; b)$?
12. Чему равна асимметрия нормального распределения?
13. Чему равна мода нормального распределения?
14. Чему равна медиана нормального распределения?
15. Чему равен эксцесс нормального распределения?

Литература

Основные источники

1. Спирина М.С, Спирина П.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. -3-е изд. ОИЦ «Академия», 2018. - 352 с. ISBN 978-5-4468-7298-5

Дополнительные источники

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для среднего профессионального образования / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 479 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-00859-3. — Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-433406
2. Прохоров, Ю. В. Лекции по теории вероятностей и математической статистике : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Ю. В. Прохоров, Л. С. Пономаренко. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 219 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-12260-2. — Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/lekcii-po-teorii-veroyatnostey-i-matematicheskoy-statistike-447116

Справочный материал

Приложение 1

Таблица интегралов

Справедливость каждой формулы проверяется дифференцированием.

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ell n|x| + c$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell n a} + c$
6. $\int e^x dx = e^x + c$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
8. $\int \cos x dx = \sin x + c$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
11. $\int tgx dx = -\ell n|\cos x| + c$
12. $\int ctgx dx = \ell n|\sin x| + c$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$
16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg \frac{x}{a} + c$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ell n\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$
18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ell n\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ell n\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$
20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ell n\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$

Основные правила интегрирования

$$I.\ \int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$$

Постоянный множитель выносится за знак интеграла.

$$II.\ \int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

Интеграл от суммы равен сумме интегралов от слагаемых.

$$III.\ \left.\begin{array}{l} \int f(x)dx = F(x) + C \\ u = \varphi(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C.$$

В частности,

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C,$$

где k и b — числа.

Пример 1

Найти интеграл $1 - x^2\ ^2dx$

Решение

Для вычисления интеграла воспользуемся формулами сокращенного умножения и свойствами интегралов

$$1 - x^2\ ^2dx = \quad 1 - 2x^2 + x^4\ dx = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + C$$

Приложение 2

Расстояние между двумя точками

Нахождение расстояния *d* между двумя точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Деление отрезка в заданном соотношении

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \qquad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

Формулы деления отрезка в заданном соотношении

В частном случае, если λ=1, т.е. *AM=MB* формулы примут вид

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Формулы деления отрезка на два равных

Нахождение площади треугольника

Требуется найти площадь треугольника ABC с вершинами $A\ x_1;y_1\ ,B(x_2;y_2)$ и $C\ (x_3;y_3)$.

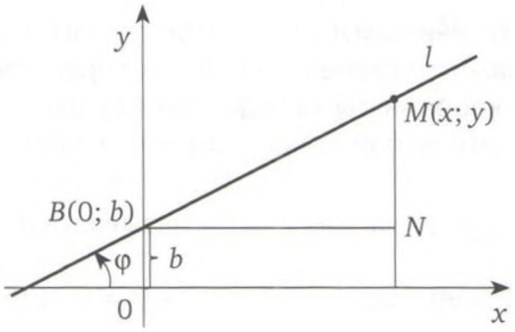
Решение: Опустим перпендикуляры из вершин треугольника на ось Ox.

$$S_{ABC} = S_{AA_1BB_1} + S_{CC_1B_1B} - S_{A_1ACC_1}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\ \begin{matrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{matrix}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть дана прямая *l*, не параллельная оси Oy. Обозначим точку пересечения прямой *l* с осью Oy через **B (0;b)**, а угол между положительным направлением оси Ox и *l* – через φ.



Угол φ, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки, называется *углом наклона* прямой l к оси Ox.

Пусть M (x;y) – произвольная точка оси l с текущими координатами x и y. Из прямоугольного треугольника BNM имеем:

$$tg\varphi = \frac{y-b}{x}$$

Эту величину называют угловым коэффициентом прямой и обозначают через k: $k=tg\varphi$. Тогда получаем

y=kx+b
уравнение прямой с угловым коэффициентом, число b называется *начальной ординатой*, k=tgφ - *угловой коэффициент прямой*

Например, если φ=π/4, b= - 3, то k=1 и уравнение данной прямой имеет вид y=x-3.

Если в уравнении $k=0$, то имеем уравнение прямой $y=b$, параллельной оси Ox и проходящей через точку B. При b=0 получаем уравнение координатной оси y=0.

Общее уравнение прямой

Определение Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

где A,B,C – произвольные числа, причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных A,B и C возможны следующие частные случаи:

1. C = 0, A ≠ 0, B ≠ 0 – прямая проходит через начало координат
2. A = 0, B ≠ 0, C ≠ 0 { By + C = 0}- прямая параллельна оси Ox
3. B = 0, A ≠ 0, C ≠ 0 { Ax + C = 0} – прямая параллельна оси Oy
4. B = C = 0, A ≠ 0 – прямая совпадает с осью Oy
5. A = C = 0, B ≠ 0 – прямая совпадает с осью Ox

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая проходит через точку $M(x_0;y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом *к*. Уравнение этой прямой можно записать в виде

$y= k x+b$, где b - пока неизвестная величина.

Т.к. прямая проходит через т. М, то координаты точки удовлетворяют уравнению прямой:

$$y_0= k x_0+ b.$$

отсюда

$$b = y_0 - k x_0.$$

Подставляя значение b в уравнение y=кx+b, получим искомое уравнение прямой

$$y= k x+ y_0 - k x_0,$$

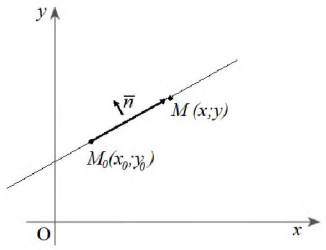
т.е.

$$\mathbf{y - y_0 = k(x - x_0)}$$

уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 $(x_0;y_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\overline{n} = (A; B)$.



Возьмем на прямой произвольную точку М (x;y) и рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$.

Поскольку векторы $\overline{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярные то их скалярное произведение равно 0, следовательно

$$\mathbf{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$$

уравнение прямой, проходящей через точку M_0 $(x_0;y_0)$ перпендикулярно вектору

$$\overline{n} = (A; B)$$

Вектор $\overline{n} = (A; B)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором этой прямой*. Отметим, что в уравнении прямой **Ax + By + C =0** коэффициент **A** является первой координатой нормального вектора прямой, коэффициент **B** – второй координатой нормального вектора.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Предполагается, что в этом уравнении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

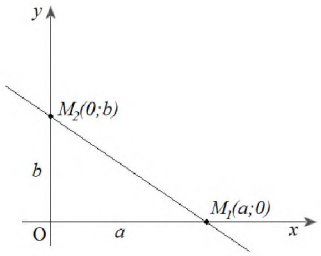
Если $x_1 = x_2$, то прямая, проходящая через точки M_1 и M_2 , параллельна оси ординат. Её уравнение имеет вид $x=x_1$.

Если $y_1 = y_2$, то уравнение прямой может быть записано в виде $y=y_1$, прямая параллельна оси абсцисс.

Уравнение прямой в отрезках

Предположим, что в общем уравнении прямой A≠0, B≠0 и C≠0. Перенесем C в правую часть и разделим обе части на -C, получим:

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \text{ или } \frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$$



Отсюда, введя обозначение

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *a* является координатой точки пересечения прямой с осью Ox, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Oy.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

уравнение прямой в отрезках, где a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат

Основные задачи на использование уравнения прямой

Взаимное расположение двух прямых

Пусть даны две прямые в общем виде $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

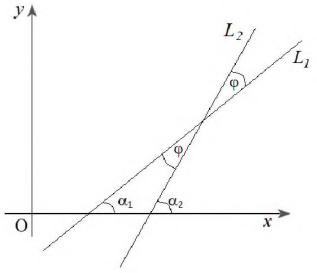
Если прямые пересекаются в некоторой точке, то координаты этой точки должны удовлетворять одновременно двум уравнениям. Следовательно, чтобы найти координаты этой точки надо решить систему уравнений. Если система единственное решение, то прямые пересекаются в одной точке. Если указанная система не имеет решение, то прямые параллельны, если имеет бесконечно много решений то прямые совпадают.

$Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны $\Leftrightarrow$

$A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$.

Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.

Угол между двумя прямыми



Пусть заданы две прямые уравнениями с угловыми коэффициентами L1: $y = k_1x + b_1$, L2: $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми φ будет определяться так:

$\alpha_2=\varphi+\alpha_1$ (теорема о внешнем угле треугольника),

значит $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$,

по разности углов тангенса и учитывая что $tg\alpha_1=k_1$, $tg\alpha_2=k_2$ получаем

$$tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $\mathbf{k_1 = k_2}$.

Две прямые перпендикулярны, если $\mathbf{k_1 \cdot k_2 = -1}$

Расстояние от точки до прямой

Пусть задана прямая L в общем виде Ax + By + C = 0 и точка $M_0(x_0;y_0)$

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$