МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ КРАСНОЯРСКОГО КРАЯ
КРАЕВОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«НОРИЛЬСКИЙ ТЕХНИКУМ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И СЕРВИСА»

Похабов Юрий Владимирович
Подписано цифровой подписью: Похабов Юрий Владимирович
Дата: 2023.11.15 11:57:25 +07'00'

РАССМОТРЕНО
на заседании предметно-цикловой комиссии _____
(название ПЦК)
протокол от «___» _____20___г.
председатель ПЦК
_____ _____
(подпись) (расшифровка подписи)

УТВЕРЖДЕНО
на заседании методического совета
протокол № 4
«10» июня 2022 г.
Председатель МС
_____ Р.Г. Иванова

ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для специальности:
09.02.07 Информационные системы программирования

Норильск, 2022

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ КРАСНОЯРСКОГО КРАЯ
КРАЕВОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«НОРИЛЬСКИЙ ТЕХНИКУМ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И СЕРВИСА»

Комплект
контрольно-измерительных материалов
учебной дисциплины
Математика
по специальности
09.02.07 Информационные системы и прггграммирование

2022

Комплект контрольно-измерительных материалов учебной дисциплины «Математика» разработан на основе Федерального государственного образовательного стандарта по специальности 09.02.07 Информационные системы и прггграммирование

Организация-разработчик: КРАЕВОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «НОРИЛЬСКИЙ ТЕХНИКУМ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И СЕРВИСА»

1.ПАСПОРТ КОМПЛЕКТА КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАТЕМАТИКА

В результате освоения предмета «ОУП.04 У Математика»

должен обладать предусмотренными примерной программой, рекомендованной Федеральным государственным автономным учреждением «Федеральным институтом развития образования»

Уметь:

Алгебра

- **У1**-выполнять арифметические действия над числами, сочетая устные и письменные приёмы;
- **У2**-находить приближенные значения величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной);
- **У3**-сравнивать числовые выражения;
- **У4**- находить ошибки в преобразованиях и вычислениях;
- **У5**- вычислять и сравнивать корни, выполнять прикидки значения корня;
- **У6**- преобразовать числовые и буквенные выражения, содержащие радикалы;
- **У7**- выполнять расчеты по формулам, содержащим радикалы, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;
- **У8**- решать иррациональные уравнения;
- **У9**- записывать корень n-й степени в виде степени с дробным показателем и наоборот;
- **У10**- вычислять степени с рациональным показателем;
- **У11**- выполнять прикидки значения степени, сравнение степеней;
- **У12**- преобразовать числовые и буквенные выражения, содержащие степени, применяя свойства;

Основы тригонометрии

- **У13**- изображать углы вращения на окружности, соотносить величины угла;
- **У14**- применять основные тригонометрические тождества для вычисления значений тригонометрических функций по одной из них;
- **У15**- применять основные формулы тригонометрии при вычислении тригонометрического выражения и его упрощения;
- **У16**- применять общие методы решения уравнений при решении тригонометрических уравнений;
- **У17**- отмечать на круге решения простейших тригонометрических неравенств;
- **У18**- применять понятия обратных тригонометрических функций при решении уравнений;

Функции и графики

- **У19**- уметь определять по формуле простейшие зависимости, виды графиков;
- **У20**- выражать одну переменную через другую;
- **У21**- находить область определения и область значений функции;
- **У22**- строить и читать графики различных функций;
- **У23**- исследовать функции;
- **У24**- составлять виды функций по данному условию;
- **У25**- решать задачи на экстремумы;
- **У26**- выполнять преобразования графиков функции;
- **У27**- вычислять значение функции по значению аргумента;
- **У28**- строить графики тригонометрических, показательных, логарифмических функций и выполнять их преобразования;
- **У29**- применять свойства функций для сравнения значений тригонометрических функций

Начала математического анализа

- **У30-** решать задачи на применение формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии;
- **У31-** применять правила дифференцирования для дифференцирования функций;
- **У32-** решать задачи на связь первообразной и ее производной; вычислять первообразную для данной функции;
- **У33-** решать задачи на применение интеграла для вычисления физических величин и площадей;
- **У34-** составлять уравнения касательной в общем виде;
- **У35-** проводить с помощью производной исследования функции, заданной формулой;
- **У36-** устанавливать связи свойств функции и производной по их графикам;
- **У37-** применять понятие производной для решения задач на нахождение наибольшего, наименьшего значения и на нахождение экстремума;

Уравнения и неравенства

- **У38-** решать рациональные, иррациональные, уравнения и системы;
- **У39-** решать показательные, логарифмические уравнения, системы, неравенства;
- **У40-** использовать свойства и графики функций для решения уравнений;
- **У41-** решать уравнения с применением всех приёмов (разложения на множители, введения новых неизвестных, подстановки, графического метода);
- **У42-** решать системы уравнений с применением различных способов;

  решать неравенства и системы неравенств с применением различных способов;
- **У43-** применять математические методы для решения содержательных задач из различных областей науки и практики.

Комбинаторика, статистика и теория вероятностей

- **У44-** применять правила комбинаторики при решении комбинаторных задач;
- **У45-** решать комбинаторные задачи методом перебора и по правилу умножения;
- **У46-** применять формулы для вычисления размещений, перестановок и сочетаний при решении задач;
- **У47-** применять формулу бинома Ньютона и треугольник Паскаля;
- **У48-** решать практические задачи с использованием понятий и правил комбинаторики
- **У49-** решать задачи на вычисление вероятностей событий;
- **У50-** решать практические задачи на обработку числовых данных, вычислять их характеристики

Геометрия

- **У51-** распознавать на чертежах и моделях различных случаев взаимного расположения прямых и плоскостей, аргументировать свои суждения;
- **У52-** выполнять построения углов между прямыми, прямой и плоскостью, между плоскостями по описанию и распознавать их на моделях;
- **У53-** применять признаки и свойства расположения прямых и плоскостей при решении задач;
- **У54-** изображать на рисунках и конструировать на моделях перпендикуляров и наклонных к плоскости, прямых, параллельных плоскостей, углов между прямой и плоскостью и обосновать построения;
- **У55-** решать задачи на вычисление геометрических величин; описывать расстояния от точки до плоскости, от прямой до плоскости, между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве;
- **У56-** изображать на чертежах и моделях расстояния и обосновывать своих суждений;
- **У57-** определять и вычислять расстояния в пространстве;
- **У58-** применять формулы и теоремы планиметрии для решения задач;
- **У59** строить по заданным координатам точки и плоскости;
- **У60-** находить координаты точек;

- **У61-** находить уравнения окружности, сферы, плоскости;
- **У62-** вычислять расстояние между точками;
- **У63-** применять теоретический материал при решении задач на действия с векторами, координатный метод;
- **У64-** применять вектора для вычисления величин углов и расстояний;
- **У65-** описывать и характеризовать различные виды многогранников; перечислять их элементы и свойства;
- **У66-** изображать многогранники и выполнять построения на изображениях и моделях;
- **У67-** вычислять линейные элементы и углы в пространственных конфигурациях, аргументировать свои суждения;
- **У68-** изображать сечения, развертки многогранников;
- **У69-** вычислять площади поверхностей;
- **У70-** строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды; применять факты и сведения из планиметрии;
- **У71-** применять свойства симметрии при решении задач; использовать приобретенные знания для исследования и моделирования несложных задач;
- **У72-** изображать основные многогранники и выполнять рисунки по условиям задач;
- **У73-** изображать тела вращения, их развертки, сечения;
- **У74-** решать задачи на построение сечений, вычисление длин, расстояний, углов, площадей;
- **У75-** проводить доказательные рассуждения при решении задач;
- **У76-** применять свойства симметрии при решении задач на тела вращения, комбинацию тел;
- **У77-** изображать основные круглые тела и выполнять рисунки по условию задачи;
- **У78-** решать задачи на вычисление площадей плоских фигур с применением соответствующих формул и фактов из планиметрии;
- **У79-** решать задачи на вычисление площадей поверхности пространственных тел;

Знат*ь:*

–**З1** - значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

–**З2** - значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;

–**З3** - универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;

–**З4** - вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

В результате освоения предмета обучающийся должен обладать общими компетенциями, включающими в себя способность:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 7. Ставить цели, мотивировать деятельность подчиненных, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Быть готовым к смене технологий в профессиональной деятельности.

Формой промежуточной аттестации является:

Дифференцированный зачёт (I, III семестр).

Экзамен (IV семестр).

2. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА ОСВОЕНИЯ ПРЕДМЕТА ПО ТЕМАМ (РАЗДЕЛАМ)

Элемент учебной дисциплины	**Формы и методы контроля**			
	Текущий контроль		**Промежуточная аттестация**	
	Форма контроля	**Проверяемые ПК, ОК, У, З**	**Форма контроля**	**Проверяемые ПК, ОК, У, З**
Раздел 1. Основы тригонометрии	Опрос, самостоятельная работа Контрольная работа 1	У13,У14, У15, З1, З2		
Раздел 2. Функции их свойства и графики	Опрос, самостоятельная работа Контрольная работа 2	У19-У29 З1, З2, З3		
Раздел 3. Тригонометрические уравнения и неравенства	Опрос, тестирование, самостоятельная работа Контрольная работа 3	У16,У17, У18 З1, З2, З3		
Раздел 4. Прямые и плоскости в пространстве	Опрос, тестирование, самостоятельная работа Контрольная работа 4, 5	У51-У58, У61 З1, З2, З3	Дифференцированный зачёт	
Раздел 5. Координаты и векторы	Опрос, тестирование, самостоятельная работа Контрольная работа 6	У59,У60, У62, У63, У64 З 1, З 2, З 3		
Раздел 6. Последовательности	Опрос, самостоятельная работа	У30 З1, З2, З3		
Раздел 7. Производная функции	Опрос, тестирование, самостоятельная работа Контрольная работа 7,8	У31, У32, У34, У35,У36, У37 З1, З2, З3		
Повторение	Опрос, сам. работа Итоговая контрольная работа № 9			
II курс				
Раздел 8. Интеграл и его применение	Опрос, самостоятельная работа Контрольная работа 1	У31, У32, У33 З 1, З 2, З 3		
Раздел 9. Многогранники	Опрос, тестирование, самостоятельная работа Контрольная работа 2	У66,У67, У68, У70-У72 З 1, З 2, З 3		
Раздел 10. Развитие понятия о числе	Опрос, самостоятельная работа	У1,У3,У4, З 1, З 2, З 3		

Раздел 11. Корни и степени	Опрос, тестирование, самостоятельная работа Контрольная работа 3	У5,У6,У7,У9,У10,У11,У12 З 1, З 2, З 3		
Раздел 12. Показательная функция	Опрос, тестирование, самостоятельная работа Контрольная работа 4	У28, У39 З 1, З 2, З 3		
Раздел 13. Логарифмы.	Опрос, тестирование, самостоятельная работа	З 1, З 2, З 3		
Раздел 14. Логарифмическая функция	Опрос, тестирование, самостоятельная работа Контрольная работа 5	У28, У39 З 1, З 2, З 3	Дифференцированный зачёт	
Раздел 15. Степенная функция	Опрос, тестирование, самостоятельная работа Контрольная работа 6	У21, У22,У31,У32 З 1, З 2, З 3		
Раздел 16. Тела и поверхности вращения	Опрос, тестирование, самостоятельная работа Контрольная работа 7	У73-У79 З 1, З 2, З 3		
Раздел 17. Измерения в геометрии	Опрос, тестирование, самостоятельная работа Контрольная работа 8	У66-У79 З 1, З 2, З 3		
Раздел 18. Комбинаторика, статистика и теория вероятностей	Опрос, тестирование, самостоятельная работа	У44-У50 З 1, З 2, З 3, З 4		
Раздел 19. Уравнения и неравенства	Опрос, самостоятельная работа Контрольная работа 9	У8, У40-У43		
Раздел 20. Повторение	Опрос, тестирование, самостоятельная работа Итоговая контрольная работа 10			
По предмету в целом			Экзамен	

3.ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОСВОЕНИЯ ПРЕДМЕТА ПО ТЕМАМ (РАЗДЕЛАМ)

Основы тригонометрии

Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой.

$\boldsymbol{n^0} = \frac{\pi}{180} \cdot \boldsymbol{n}$ – *формула перехода от градусной меры угла к радианной*

$\boldsymbol{n}$ рад. $= \frac{180}{\pi} \cdot \boldsymbol{n}$ - *формула перехода от радианной меры угла к градусной*

Пример:

$45^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi \cdot 45}{180} = \frac{\pi}{4}$;

$\frac{3\pi}{4} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} = 135^0$.

Решить самостоятельно

1)Выразите в радианной мере величины углов:

а) $60^0, 72^0, 270^0$; б) $150^0, 216^0, 90^0$.

2)Выразите в градусной мере величины углов:

а) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{5}, \pi$; б) $\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{12}$.

Пример:

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$; $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin 0 + \cos\frac{\pi}{2} + sin^2\frac{\pi}{4} = 0 + 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

$3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\pi + ctg^2\frac{\pi}{6} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-1) + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3}{2} - 2 + 3 = 1\frac{1}{2} + 1 = 2\frac{1}{2}$.

Найдите числовое значение выражения:

1) $4\sin\frac{\pi}{6} + 2cos^2\frac{\pi}{4}$;
2) $2\sin\frac{\pi}{4} + 4\cos\frac{\pi}{3}$;
3) $2 - 3tg^2\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{3}$;
4) $\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} - 2tg^2\frac{\pi}{3}$;
5) $5\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos 0 - 3\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi$;
6) $3 - sin^2\frac{\pi}{3} + 2cos^2\frac{\pi}{2} - 5tg^2\frac{\pi}{4}$;
7) $3sin^2\frac{\pi}{2} - 4tg^2\frac{\pi}{4} - 3cos^2\frac{\pi}{6} + 3ctg^2\frac{\pi}{2}$.

Основные тригонометрические тождества

<u>Основные тригонометрические тождества</u>

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1;$$

$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha};$$

1)Найдите значение остальных тригонометрических функции, если

$\sin\alpha=\frac{5}{13};\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$

Решение

$\sin\alpha=\frac{4}{5};\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$	Найти $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$
$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$	Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством
$cos^2\alpha=1-sin^2\alpha$	Выразим $cos^2\alpha$
$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, α – I четверть, $\cos\alpha>0$	Определим в какой четверти α
$\cos\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5};$	
$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{5}:\frac{3}{5}=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{4}{3};$	
$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{3}{4}.$	
Ответ: $\cos\alpha=\frac{3}{5};\ tg\alpha=\frac{4}{3};\ ctg\alpha=\frac{3}{4}.$	

2. Упростить выражения:

a) $1-\frac{1}{sin^2x};$

b) $cos^2t+1-sin^2t.$

c) $\frac{1-sin^2x}{cos^2x};$

d) $\frac{(\sin t+\cos t)^2}{1+2\sin t\cos t}.$

Пример:	***Необходимые формулы***
a)$1-\frac{1}{sin^2x}=\ 1-(ctg^2x+1)=1-ctg^2x-1=-ctg^2x$	Воспользуемся формулой $ctg^2\alpha+1=\frac{1}{sin^2\alpha}$
$b)cos^2t+1-sin^2t=\ cos^2t+\ cos^2t=2\ cos^2t$	$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$ $1-sin^2\alpha=\ cos^2\alpha$
$c)\ \frac{1-sin^2x}{cos^2x}=\frac{cos^2x}{cos^2x}=1$	$1-sin^2\alpha=\ cos^2\alpha$
d)$\frac{(\sin t+\cos t)^2}{1+2\sin t\cos t}=\frac{sin^2t+2\sin t\ \cos t+cos^2t}{1+2\sin t\cos t}=$ $=\frac{1+2\sin t\cos t}{1+2\sin t\cos t}=1$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $sin^2t+cos^2t=1$

Самостоятельная работа

1. Найдите значение остальных тригонометрических функции, если

   a) Дано: $\cos\alpha=\frac{3}{5}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найти $\sin\alpha,\ \ tg\alpha,\ \ ctg\,\alpha$.

   b) Дано: $\sin\alpha=-\frac{5}{13}, \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найти $\cos\alpha,\ \ tg\alpha,\ \ ctg\,\alpha$.

2. Упростить выражение:

   a) $\frac{1}{cos^2\alpha}-tg^2\alpha-\ sin^2\alpha;$

   b) $\frac{1}{cos^2x}-1;$

   c) $sin^2t+2cos^2t-1.$

   d) $(1-\sin t)(1+\sin t);$

   e) $sin^2\alpha+cos^2\alpha+ctg^2\alpha.$

   f) $sin^4x+sin^2x\ cos^2x-sin^2x+1.$

Формулы сложения

Формулы сложения

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta};$$
$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta};$$

<u>Пример:</u>

Вычислите $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, если

$cos\,\alpha=\frac{3}{5}$; $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; $\sin\beta=-\frac{8}{17}$; $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

Решение:

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$,

$\alpha-IV$ четверть, $\sin\alpha<0$; $\beta-III$ четверть, $\cos\beta<0$;

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5};$$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2}=-\sqrt{1-\frac{64}{289}}=-\sqrt{\frac{289}{289}-\frac{64}{289}}=-\sqrt{\frac{225}{289}}=-\frac{15}{17};$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right)-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)=\frac{60}{85}+\frac{24}{85}=\frac{84}{85},$$

$$\cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)=-\frac{45}{85}-\frac{32}{85}=-\frac{77}{85}.$$

Самостоятельная работа

Вариант- I

1. Вычислите $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{12}{13}$; $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\cos\beta=\frac{3}{5}$; $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.
2. Найдите значение выражения:
   а)$cos\,107^0\cos 17^0+\sin 107^0\sin 17^0$;
   б)$\sin 51^0\cos 21^0-\cos 51^0\sin 21^0$.
3. Докажите тождество: $\frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$.

Вариант – II

1. Вычислите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$; $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; $\cos\beta=-\frac{4}{5}$; $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.
2. Найдите значение выражения:
   а)$cos\,36^0\cos 24^0-\sin 36^0\sin 24^0$;
   б)$\sin 63^0\cos 27^0+\cos 63^0\sin 27^0$.

3. Докажите тождество: $\frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha.$

Формулы приведения

<u>Пример:</u>

1) Упростить выражения:

а)

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)+tg(\pi-\alpha)=\cos\alpha-(-\cos\alpha)+(-tg\alpha)=2\cos a-tg\alpha;$

б)$\frac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin(2\pi+\alpha)}{tg(\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha\cdot\sin\alpha}{-tg\alpha\cdot\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{tg\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cos\alpha;$

в)$\frac{\cos(\pi+\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)\,\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=tg\alpha.$

Самостоятельная работа

«Формулы приведения»

1) Упростить выражения:

а) $\sin x+\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right);$

б)$\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi+x);$

в)$\frac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin(2\pi+\alpha)}{tg(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)};$

г)$\frac{\cos(-\alpha)\cos\left(180^0+\alpha\right)}{\sin(-\alpha)\,\sin(90^0+\alpha)}.$

2) Доказать тождество:

$$\frac{\sin(\pi-\alpha)\cdot ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{tg(\pi+\alpha)\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(-\alpha)}=\sin\alpha$$

Формулы удвоения

<u>Формулы двойного аргумента</u>

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha;$

.$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$

.$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha};$

<u>Пример:</u>

Найдите значение выражения $\sin 2x$, если $\cos x=0{,}6,\frac{3\pi}{2}<x<2\pi.$

<u>Решение:</u>

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$

$sin^2 x + cos^2 x = 1; sin^2 x = 1 - cos^2 x$

$x - IV$ четверть, $\sin x < 0;$

$\sin x = -\sqrt{1 - cos^2 x} = -\sqrt{1 - (0{,}6)^2} = -\sqrt{1 - 0{,}36} = -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8;$

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 2 \cdot (-0{,}8) \cdot 0{,}6 = -0{,}96 = -\frac{96}{100} = -\frac{24}{25}.$

Ответ: $-\frac{24}{25}$

Самостоятельная работа

Вариант I	***Вариант II***
1)Найдите значение выражения $50 \cdot \sin 2x$, если $\cos x = -\frac{3}{5}, -\pi < x < 0.$	1)Найдите значение выражения $9\sqrt{5} \cdot \sin 2x$, если $\sin x = -\frac{2}{3}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$
2)Упростите: а) $\frac{2sin^2\alpha \cdot ctg\alpha}{\sin 2\alpha}$; б) $\frac{2(1-sin^2\alpha)}{\sin 2\alpha} - ctg\alpha.$	2)***Упростите:*** а) $\frac{\sin 2\alpha}{cos^2\alpha \cdot tg\alpha}$; б) $\frac{1-cos^2\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2}tg\alpha.$
3) Найдите значение выражения $\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{5}$	

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение, преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

<u>Формулы суммы и разности</u>

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2};$$

<u>Формулы перехода от произведения к сумме</u>

$\sin\alpha\ \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$;

$\cos\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$;

$\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$.

<u>Пример:</u>

Представьте в виде произведения:

а) $\sin\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12} = 2\sin\frac{\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2} = 2\sin\frac{\frac{6\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{8\pi}{12}}{2} = 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}$

$== 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) $\cos 25^0 + \cos 65^0 = 2\cos\frac{25^0+65^0}{2}\cdot\cos\frac{25^0-65^0}{2} = 2\cos 45^0\cdot\cos(-20)^0 =$

$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 20^0 = \sqrt{2}\cos 20^0$.

Самостоятельная работа

1.Представьте в виде произведения:

а) $\cos 20^0 + \cos 40^0$;

б) $\sin 75^0 - \sin 15^0$;

в)$\sin\frac{11\pi}{18} + \sin\frac{7\pi}{18}$;

г) $\cos\frac{11\pi}{24} - \cos\frac{\pi}{8}$.

2)Вычислить:

а)$\frac{1}{2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{3\pi}{8}}$; б) $\frac{\sin 110^0 - \sin 10^0}{\sin 50^0}$.

3) Докажите, верно ли равенство:

$\sin 20^0 + \sin 40^0 - \cos 10^0 = 0$.

Контрольная работа № 1
«Основы тригонометрии»
Вариант – I

1. Найдите значение выражения: $3 - sin^2\frac{\pi}{3} + 2cos^2\frac{\pi}{2} - 5tg^2\frac{\pi}{4}$.

2. Упростить выражение: $\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(x + \frac{\pi}{2})\cos(\pi - x)$.

3. Найти $\cos\alpha, \sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

4. Доказать тождество: $\frac{2sin^2\alpha \cdot ctg\alpha}{cos^2\alpha - sin^2\alpha} = tg2\alpha.$

5. Докажите, что: $\frac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = tg4\alpha.$

Вариант – II

1. Найдите значение выражения: $3sin^2\frac{\pi}{2} - 4tg^2\frac{\pi}{4} - 3cos^2\frac{\pi}{6} + 3ctg^2\frac{\pi}{2}.$

2. Упростить выражение: $\sin(\pi + x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(2\pi + x)\sin(\frac{3\pi}{2} - x).$

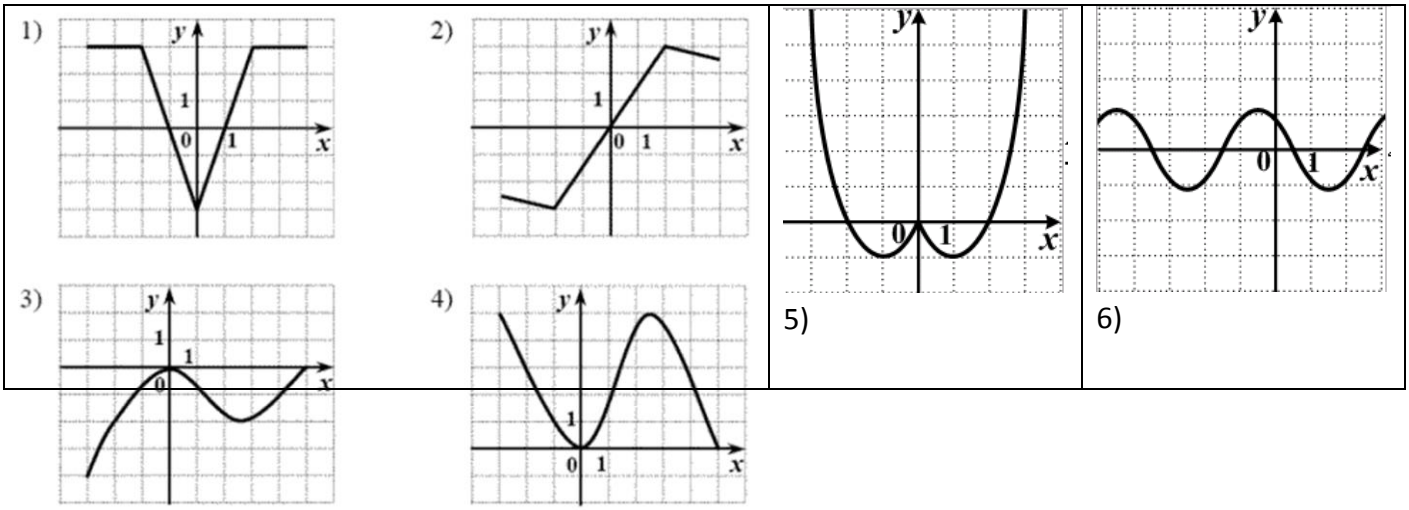
3. Найти $\sin\alpha, \cos 2\,\alpha,$ если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$

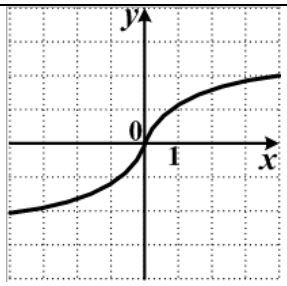
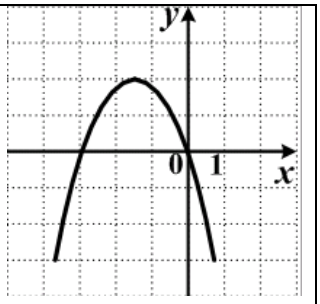
4. Доказать тождество: $\frac{2cos^2\alpha \cdot tg\alpha}{sin^2\alpha - cos^2\alpha} = -tg2\alpha.$

5. Докажите, что: $\frac{\sin\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 5\alpha} = tg3\alpha$

Функции
Самостоятельная работа
«Чётность и нечётность функций. Периодичность»

1) Укажите какие из функций являются:
   а) чётные –
   б) нечётные –
   в) ни чётные, ни нечётные -



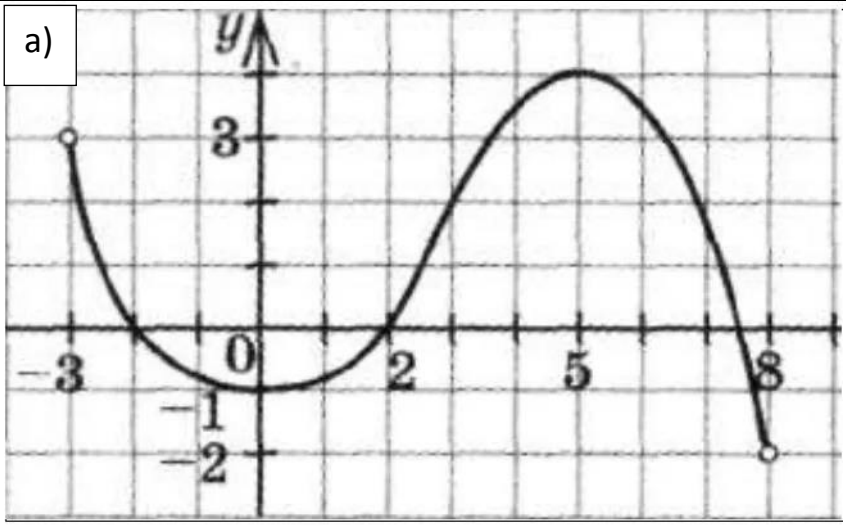
	 7)	 8)

2) Исследовать функцию на чётность, нечётность.
   a) $f(x) = 3x^2 + x^4$;
   b) $f(x) = \frac{x^4+1}{2x^3}$;
   c) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$;
   d) $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sin x}{x^2-9}$;
   e) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
3) Найдите наименьший положительный период для функций:
   a) $f(x) = 3\cos 4x$;
   b) $f(x) = ctg\frac{x}{3}$;
   c) $f(x) = \sin 1{,}5x$;
   d) $f(x) = 5tg2x$.
4) Вычислите значение функции при указанных значениях x:
   a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, x = 1$;
   b) $f(x) = \frac{x-3}{2x-5}, x = 4$;
   c) $f(x) = \sqrt{x^2+9}, x = -4$.

Самостоятельная работа
«Исследование функций»

1. Исследовать функции по общей схеме:

а)



б)

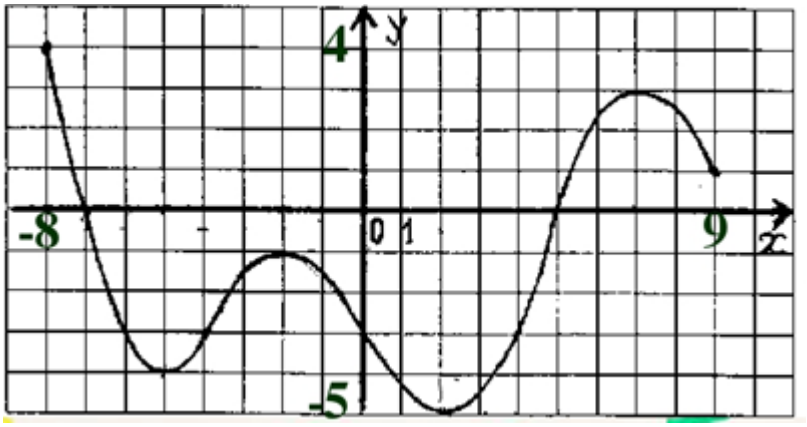


Схема исследования:

1.Область определения

2.Область значений

3.Чётность, нечётность функции

4. Точки пересечения с осями координат:

а) точки ∩ с осью ОХ:

б) точки ∩ с осью ОУ:

5. Промежутки знакопостоянства: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$

6. Промежутки возрастания, убывания функции

7. Точки максимума и минимума, экстремумы функции.

2. Постройте график функции, если известны её свойства:

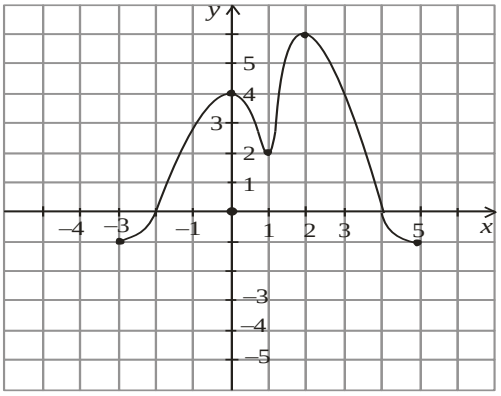
D(f)= $[-4; 4]$ 2.E(f)= $[-3; 6]$ 3. а) точки ∩ с осью ОХ: $A(-4; 0), B(-1; 0); C(2{,}5; 0)$ б) точки ∩ с осью ОУ: $D(0;\ -2)$ 4. $f(x) > 0$ при $x \in (-4; -1) \cup (2{,}5; 4]$ $f(x) < 0$ при $x \in (-1; 2{,}5)$ 5. $f(x) \uparrow$ при $x \in [-4; -2] \cup [1; 4]$ $f(x) \downarrow 0$ при $x \in [-2; 1]$ 6. x_{max}= -2 x_{min}= 1 $f(-2) = 2$ $f(1) = -3$ 7.Дополнительные точки $f(4) = 6$	1.D(f)= $[-5; 3]$ 2.E(f)= $[0; 5]$ 3. а) точки ∩ с осью ОХ: $A(3; 0)$ б) точки ∩ с осью ОУ: $D(0;\ 4{,}5)$ 4. $f(x) > 0$ при $x \in$ [-5; 3) $f(x) < 0$ ---------- 5. $f(x) \uparrow$ при $x \in [-3; 1]$ $f(x) \downarrow 0$ при $x \in [-5; -3] \cup [1; 3]$ 6. x_{max}= 1 x_{min}= -3 $f(1) = 5$ $f(-3) = 2$ 7.Дополнительные точки $f(-5) = 3$

Контрольная работа № 2
«Функции»
Вариант – 1

1. Найдите область определения функции: $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-9}$.

2. По графику функции $y = f(x)$ укажите

а) область определения функции;
б) нули функции;
в) промежутки постоянного знака функции;
г) точки максимума и минимума функции;
д) промежутки монотонности;
е) наибольшее и наименьшее значения функции;
ж) область значений функции.



3. Исследуйте на чётность функцию: а) $f(x) = 4x - tgx$; б) $f(x) = x^2 + 3\cos x$.

4. Исследуйте функцию и постройте её график: $y = 2cos\frac{1}{2}x$.

Вариант – 2

1. Найдите область определения функции: $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2-4}$.

2. По графику функции $y = f(x)$ укажите:

а) область определения функции;
б) нули функции;
в) промежутки постоянного

знака

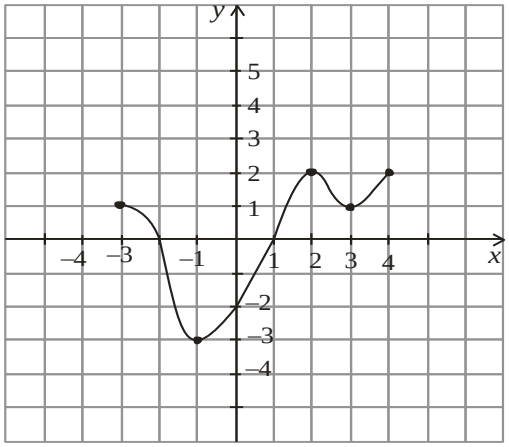
функции;

г) точки максимума и минимума функции;

д) промежутки монотонности;

е) наибольшее и наименьшее значения функции;

ж) область значений функции.



3. Исследуйте на чётность функцию:

а) $f(x) = \frac{3x^8}{\cos x}$; б) $f(x) = ctgx + x \cdot cos^2x$.

4. Исследуйте функцию и постройте её график: $y = \frac{1}{2}sin2x$.

Тригонометрические уравнения и неравенства

Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс

Арксинусом числа a называется такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Пример:

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, так\ как\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4} \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}, так\ как\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{6} \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

Арккосинусом числа a называется такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

Пример:

$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, так\ как\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{6} \epsilon [0; \pi].$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, так\ как\ \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\pi}{4} \epsilon [0; \pi].$

Арктангенсом числа a называется такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

Пример:

$\mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4}, так\ как\ tg\frac{\pi}{4} = 1; \frac{\pi}{4} \epsilon \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

$\mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = -\mathrm{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}, так\ как\ tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}; -\frac{\pi}{3} \epsilon \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

Арккотангенсом числа a называется такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

Пример:

$\mathrm{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}, так\ как\ tg\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\pi}{3} \epsilon (0; \pi).$

$\mathrm{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \mathrm{arctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, так\ как\ ctg\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}; \frac{5\pi}{6} \epsilon (0; \pi).$

Найти значения выражения:

Пример:

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}-\arcsin\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{6\pi}{6}-\frac{2\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}.$

$\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$

<u>Решить самостоятельно:</u>

1) Вычислить:

a) $\arcsin 1;$

b) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$

c) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

d) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$;

e) $\operatorname{arcctg}(-1).$

2) Найдите значения выражения:

a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2};$

b) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2};$

c) $\arcsin(-1)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2};$

d) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arcsin(-1);$

e) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

f) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Самостоятельная работа

«Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс»

Вычислить:

1) arccos 1=
2) arcsin $\frac{1}{2}=$
3) arccos $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$=
4) arcsin $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$
5) arctg $(-\sqrt{3})$=
6) arccos $\frac{1}{2}$ - arcsin $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$=
7) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\operatorname{arctg}0;$
8) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\sqrt{3};$
9) $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+arctg\frac{1}{\sqrt{3}}-arcsin\frac{1}{2}+arcctg0;$
10) $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-arcsin1+arctg\sqrt{3}-arccos\frac{\sqrt{3}}{2};$
11) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-arctg(-1)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$

12) $arctg(-1)-\arccos(-1)-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right).$

Простейшие тригонометрические уравнения

Формулы и частные случаи.

$\sin t = a$ $t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z;$ $\sin t = 1$ $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$ $\sin t = -1$ $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$ $\sin t = 0$ $t = \pi n, n \in Z.$	$\cos t = a$ $t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z;$ $\cos t = 1$ $t = 2\pi n, n \in Z;$ $\cos t = -1$ $t = \pi + 2\pi n, n \in Z;$ $\cos t = 0$ $t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$
$tgt = a$ $t = arctga + \pi n, n \in Z$	

<u>Пример:</u>

а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$

$x = (-1)^k arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, k \in Z;$

$x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z.$

Ответ: $\boldsymbol{(-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z.}$

б) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} = (-1)^k arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k\epsilon Z;$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} = (-1)^{k+1} arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, k\epsilon Z;$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z;$

$\frac{x}{2} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{10} + \pi k, k\epsilon Z;$

$x = (-1)^{k+1}\frac{2\pi}{4} + \frac{2\pi}{10} + \pi k, k\epsilon Z;$

$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi k, k\epsilon Z.$

Ответ: $\boldsymbol{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi k, k\epsilon Z.}$

в) $2\cos x + 1 = 0;$

$2\cos x = -1;$

$\cos x = -\frac{1}{2};$

$x = \pm arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n\epsilon Z;$

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z.$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z.$

Решить уравнения самостоятельно:

$1)\ \sin x = a$	$2)\ \cos x = a$	$3)\ \mathrm{tg}\, x = a$
a) $\sin x = \frac{1}{2}$; *b)* $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $2\sin x + \sqrt{2} = 0$; ***d)*** $\sin x = -1$.	*a)* $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $\cos x = -1$; *c)* $2\cos x + \sqrt{2} = 0$; *d)* $2\cos x - 1 = 0$.	*a)* $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; *b)* $tgx + \sqrt{3} = 0$; *c)* $ctgx + 1 = 0$ ***d)*** $\sqrt{3}\mathrm{ctg}x - 1 = 0$.

Самостоятельная работа

Решить уравнения:

1) $\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;
2) $\cos 4x = 0$;
3) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $ctg\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$;
5) $\sqrt{3}tg\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 3$;
6) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$;
7) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$.

Решение тригонометрических уравнений.

1. **Метод введения новых переменных**.

Суть этого метода заключается в следующем: если уравнение f(x)=0 удалось преобразовать к виду $\varphi(g(x)) = 0$, то нужно ввести новую переменную y=g(x), решить уравнение φ(y)=0, а за тем рассмотреть совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l} g(x) = y_1 \\ g(x) = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g(x) = y_n \end{array}\right.$, где y_1, $y_2, \ldots, y_n$ это корни уравнения φ(y)=0. Иногда при решении тригонометрических уравнений новая переменная очевидна. Но иногда эту новую переменную трудно увидеть, а можно выявить лишь в процессе каких-либо преобразований.

Пример: cos2x – 5sinx – 3=0

воспользуемся формулой **cos2x=1 – sin^{2}x**

Тогда исходное уравнение примет вид

$2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$

Введем новую переменную y = sinx, y∈[-1;1]

Получим квадратное уравнение

$2y^2 + 5y + 2 = 0$

Корни этого уравнения являются

$y_1 = -\frac{1}{2}$; $y_2 = -2$

Второй корень, т.е. $y_2 = -2$ не подходит, так как -2<-1

Возвращаясь к исходной переменной, решаем уравнение

$\sin x = y_1$,

$\sin x = -\frac{1}{2}$,

$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k;\ k\in Z$

Ответ: $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k;\ k\in Z$

2. **Решение однородных тригонометрических уравнений**.

Определение:

Уравнение, в котором каждое слагаемое имеет одну и туже степень, называется однородным.

$a\cdot\sin f(x)+b\cdot\cos f(x)=0,\ a\neq0,\ b\neq0$

$a\cdot\sin^2 f(x)+b\cdot\sin f(x)\cdot\cos f(x)+k\cdot\cos^2 f(x)=0,\ a\neq0,\ b\neq0,\ k\neq0$

Его можно решить делением на старшую степень синуса или косинуса. При этом мы не теряем корней, так как если мы в данное уравнение подставим cosx=0, то получим, что sinx=0, что невозможно.

а) рассмотрим решение уравнения вида:

$a\cdot\sin f(x) + b\cdot\cos f(x)=0$

Пример: $\sin x + \sqrt{3}\cos x=0$

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\sqrt{3}=0$$

$$tgx=-\sqrt{3}$$

$$x=arctg(-\sqrt{3})+\pi k, k\in Z$$

$$x=-\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$

b)рассмотрим решение уравнения вида:

$\sin^2 f(x) + b\cdot\sin f(x)\cdot\cos f(x) + k\cdot\cos^2 f(x)=0$

Пример: $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=0$

Разделим каждое слагаемое на $\cos^2$x, получим:

$$\frac{6\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$$

$$6tg^2x+tgx-1=0$$

Обозначим $tgx=y$

$$6y^2+y-1=0$$

$$D=b^2-4ac=1+24=25$$

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm5}{12};\quad y_1=\frac{1}{3}, y_2=-\frac{1}{2}$$

1) $tgx=y_1$

$$tgx=\frac{1}{3}; x=arctg\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z$$

2) $tgx=y_2$

$$tgx=-\frac{1}{2}; x=-arctg\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$$

Ответ: $-arcgt\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$

$$arcgt\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z.$$

3. Решение тригонометрических уравнений с помощью формул суммы и разности.

Для решения уравнений таким способом применяются следующие формулы:

$$\sin\alpha\pm\cos\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Эти формулы еще называют формулами перехода от суммы к произведению.

Пример: sinx – sin2x + sin5x + sin8x=0

$$(\sin x+\sin 5x)+(\sin 8x-\sin 2x)=0$$

Воспользуемся формулами суммы и разности

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$2\sin 3x\cos 2x+2\sin 3x\cos 5x=0$$

$$\sin 3x(\cos 2x+\cos 5x)=0$$

$\sin 3x=0$ cos2x+cos5x=0

$3x=\pi n; n\in Z$ $2\cos\frac{7}{2}x\cos\frac{3}{2}x=0$

$x=\frac{\pi n}{3}; n\in Z$ $1)\cos\frac{7}{2}x=0;\ \frac{7}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

$$x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}k; k\in Z$$

$$2)\cos\frac{3}{2}x=0;\ \frac{3}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi m; m\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi m; m\in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}n;\frac{\pi}{7}(1+2k); n,k\in Z$.

4. Метод разложения на множители.

Суть этого метода заключается в следующем: Пусть надо решить уравнение f(x)=0 и пусть $f(x)=f_1(x)f_2(x)f_3(x)$. Тогда уравнение f(x)=0 можно заменить совокупностью более простых уравнений: $\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0\\ f_2(x)=0\\ f_3(x)=0\end{array}\right.$

Найдя корни уравнений этой совокупности, и отобрав из них, те корни, которые принадлежат области определения уравнения f(x)=0, мы получим корни исходного уравнения. Редко встречаются примеры уравнений, особенно тригонометрических, в которых разложение на множители уже произведено. Но чаще возникают такие ситуации, когда дано уравнение f(x)=0 и надо преобразовать выражение f(x) к виду $f(x)= f_1(x)\ f_2(x)f_3(x)\ldots$, то есть превратить данное уравнение в совокупность более простых уравнений. Поэтому полезно вспомнить приемы разложения на множители:

- вынесение общего множителя за скобки,
- способы группировки,
- использование формул сокращенного умножения.

Пример:sinx+sin3x=4cos^{2}x

$$\sin x+\sin 3x=4\cos^2 x$$
$$2\sin 2x\cos x-4\cos^2 x=0$$
$$4\sin x\cos x\cos x-4\cos^2 x=0$$
$$4\sin x\cos^2 x-4\cos^2 x=0$$
$$4\cos^2 x(\sin x-1)=0$$
$$\cos x=0 \qquad \text{èëè} \qquad \sin x-1=0$$
$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\notin\in Z \qquad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}(1+2k),\ k\in Z$ **.**

5. Решение тригонометрических уравнений способом понижения порядка.

Для решения уравнений таким способом применяются следующие формулы:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \qquad tg^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

Пример:sin^{2}3x+sin^{2}4x=sin^{2}5x+sin^{2}6x

Воспользуемся формулой $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$,

Тогда наше уравнение примет вид

$$\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}+\frac{1-\cos 12x}{2}$$
$$\cos 12x-\cos 6x=\cos 8x-\cos 10x$$

Воспользуемся формулой для разности косинусов

$$-2\sin 3x\sin 9x=2\sin 9x\sin x$$
$$\sin 9x(\sin 3x+\sin x)=0$$
$$\sin 9x2\sin 2x\cos x=0$$

Перейдем к совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\sin 9x=0\\ \sin 2x=0\\ \cos x=0\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x_1=\frac{\pi n}{9};n\in Z\\ x_2=\frac{\pi n}{2};n\in Z\\ x_3=\frac{\pi}{2}+\pi n;n\in Z\end{array}\right.$$

Заметим, что x_3 полностью поглощаются значениями x_2;

запишем результат.

Ответ: $\frac{\pi ò}{9};\frac{\pi n}{2};n\in Z$

6. Стандартный прием в нестандартных задачах.

Решить уравнение:

Пример: $x^2+2x\sin xy+1=0$

Уравнение такого рода вызывает у учеников недоумение, ведь они решали тригонометрические уравнения, где переменная находилась под знаком функции (причем одна, а не произведение

двух переменных). Решим это уравнение с помощью известных приемов. В левой части имеем единицу, а значит, можно воспользоваться основным тригонометрическим тождеством: $\sin^2 xy + \cos^2 xy = 1$

$x^2 + 2x\sin xy + \sin^2 xy + \cos^2 xy = 0$

Сумма первых трех членов представляет собой полный квадрат

$(x + \sin xy)^2 + \cos^2 xy = 0$

Следовательно, в левой части сумма квадратов, она равна нулю тогда, когда одновременно равны нулю выражения, стоящие в квадратах. Запишем

$$\begin{cases} x + \sin xy = 0 \\ \cos xy = 0 \end{cases}$$

Если $\cos xy = 0$, то $\sin xy = \pm 1$, поэтому эта система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ \cos xy = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ \cos xy = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \end{cases}$$

Ответ: $x = 1, \quad y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $\quad x = -1, y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Самостоятельная работа.

ВАРИАНТ I	ВАРИАНТ II
Решить тригонометрические уравнения:	
1) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$	1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$
2) $2\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$	2) $2\sin x + 3\cos 2x - 3 = 0$
3) $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 0$	3) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3\cos^2 x$

Ответы:

В-I

1) $2\pi k, \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, k, n \in Z$

2) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \pm\arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z$

3) $-arctg\dfrac{1}{2} + \pi n, arctg\dfrac{1}{3} + \pi n, n \in Z$

В-II

1) $(-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, k, n \in Z$

2) $\pi n, (-1)^k\arcsin\dfrac{1}{3} + \pi k, k, n \in Z$

3) $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n, arctg 3 + \pi n, n \in Z$

Решение тригонометрических уравнений

Решить уравнения:

A)

1) $cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $2sinx = \sqrt{3}$;
3) $tg3x = 1$;
4) $\sin x + \sin(\pi + x) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$.

B)

1) $2sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$;
2) $2cos^2x + sinx + 1 = 0$.

C)

1) $3sin^2x + sinx \cdot cosx - 2cos^2x = 0$;
2) $sinx + sin3x - sin5x - sin7x = 0$.

Самостоятельная работа

A) Решить уравнения:

1) $sinx = \frac{1}{2}$;
2) $2cosx = -\sqrt{3}$;
3) $tg2x = \sqrt{3}$;
4) $\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) = 0$.

B)

1) $2cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;
2) $2sin^2x + 7cosx + 2 = 0$.

C)

1) $6sin^2x + sinx \cdot cosx - cos^2x = 0$;
2) $sinx - sin2x + sin5x + sin8x = 0$.

Контрольная работа № 3

«Тригонометрические уравнения и неравенства»

Вариант I

1. Решить уравнения: а) $1 + \sin x = 0$; б) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$; в) $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.
2. Решить неравенство: $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Решить уравнения:

   а) $3\cos x - 2sin^2x = 0$;

   б) $1 + 3sin^2x = 2\sin 2x$.
4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = -\sqrt{2} \end{cases}$.

Вариант II

1. Решить уравнения: а) $\cos x + 1 = 0$; б) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$; в) $\cos\frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$.
2. Решить неравенство: $\sin x \geq \frac{1}{2}$
3. Решить уравнения:
   а) $2cos^2 x + 3\sin x = 0$;
   б) $2\sin x\cos x = \cos 2x - 2sin^2 x$.
4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \cos x - \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$.

Прямые и плоскости в пространстве

Аксиомы стереометрии

Заполнить таблицу:

1	Основные фигуры стериометрии	
2	Аксиома 1	рис
3	Аксиома 2	рис
4	Аксиома 3	рис
5	Что изучает стереометрия?	

ФИ_____

1. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они……
2. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости называются……
3. Через точку вне данной прямой можно провести ……., параллельную данной и притом только ……
4. Какова ни была плоскость, существуют точки ……..
5. Две плоскости называются параллельными, если ……
6. Основными фигурами пространства являются: ……
7. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно …… другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
8. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения ……

Параллельность плоскостей

<u>Решить задачи</u>

1. Через точку А, не лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые m и n. Прямая m пересекает α и β в точках C_1 и C_2 соответственно, прямая n в точках D_1 и D_2. Найти длину отрезка D_1D_2, если $C_2D_2 : C_1D_1$=7: 5, а AD_1=6 см.

2. Через точку М, лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые a и b. Прямая a пересекает плоскость α и β в точках A_1 и A_2 соответственно, прямая b в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка MB_2, если $A_1B_1 : A_2B_2$= 3: 4, B_1B_2=14 см.

3. Параллельные плоскости α и β пересекают стороны угла ABC в точках A_1 , C_1, A_2, C_2 соответственно. Найдите BC_1, если $A_1B : A_1A_2=1 : 3$, $BC_2=12$см.

<u>Решить самостоятельно</u>

1. Через точку K, не лежащую между параллельными плоскостями α и β , проведены прямые m и n. Прямая m пересекает α и β в точках M_1 и M_2 соответственно, прямая n в точках N_1 и N_2. Найти длину отрезка N_1N_2, если $M_2N_2 : M_1N_1=8 : 5$, а $KN_1=10$ см.

2. Через точку K, лежащую между параллельными плоскостями α и β , проведены прямые a и b. Прямая a пересекает плоскость α и β в точках A_1 и A_2 соответственно, прямая b в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка KB_2, если $A_1 B_1 : A_2 B_2= 6: 8$; $B_1B_2=28$ см.

Самостоятельная работа

«Перпендикулярность плоскостей. Угол между плоскостями»

Вариант I

1. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите AB, если AD=4 м, BC=7 м, CD=1м.
2. Равнобедренные треугольники ABC и ABD с общим основанием AB лежат в различных плоскостях, угол между которыми α. Найдите $\cos\alpha$, если AB=32 см, AC=65 см, AD=20см, CD=63 см.
3. Ребро куба $MNKEM_1N_1K_1E_1$ равно 8 см. Найдите расстояние d между прямыми: а)ME и KK_1; б) KK_1 и N_1E_1

Вариант II

1. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите AB, если AD=5см, BC=5 см, CD=1 см.
2. Плоскости равнобедренных треугольников ABC и ABD с общим основанием AB перпендикулярны. Найдите CD, если AB=6 дм, AD= $\sqrt{31}$ дм, $\angle ABC=60^0$.
3. Ребро куба $PDFEP_1D_1F_1E_1$ равно 10 см. Найдите расстояние d между прямыми: а)PE и FF_1; б) FF_1 и D_1E_1.

Контрольная работа № 4

«Прямые и плоскости в пространстве»
«Взаимное расположение прямых и плоскостей»
Вариант I

1.

a) Написать обозначение прямых.
b) Написать обозначение отрезков.
c) Написать обозначение углов.
d) Написать обозначение плоскостей.
e) Сколько плоскостей можно провести через одну прямую?

2. Через точки А, В и середину М отрезка АВ проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках A_1, B_1, M_1 соответственно. Найти длину отрезка MM_1, если AA_1=13м, BB_1=7м, причём отрезок АВ не пересекает плоскость α.
3. Дан треугольник АВС. Плоскость, параллельная прямой АВ, пересекает сторону АС этого треугольника в точке A_1, сторону ВС – в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если АВ=8см, $AA_1:A_1C$=5:3.
4. Лучи *КМ* и *КР* пересекают параллельные плоскости α и β в точках M_1 , M_2 и P_1, P_2 соответственно. Вычислите длину отрезка $M_1 M_2$, если $KM_1=8см$, $M_1 P_1:M_2 P_2=4:9$.
5. Через точку *М*, лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые а и в. Первая пересекает плоскости в точках A_1, B_1 соответственно, вторая в точках A_2 и B_2. Вычислите длину отрезка MB_2, если $A_1A_2:B_1B_2=3:5$, $A_2B_2=16см$.

Вариант II

1.

a) Написать обозначение плоскостей.
b) Написать обозначение углов.
c) Назовите основные фигуры в пространстве.
d) Сколько плоскостей можно провести через три точки?
e) Могут ли прямая и плоскость иметь две общие точки?

2. Через точки А, В и середину М отрезка АВ проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках A_1, B_1, M_1 соответственно. Найти длину отрезка MM_1, если AA_1=3м, BB_1=17м, причём отрезок АВ не пересекает плоскость α.
3. Дан треугольник АВС. Плоскость, параллельная прямой АВ, пересекает сторону АС этого треугольника в точке A_1, сторону ВС – в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если АВ=12см, AA_1:АС=4:6.
4. Даны две параллельные плоскости и не лежащая между ними точка *Р*. Две прямые, проходящие через точку *Р*, пересекают ближнюю к точке *Р* плоскость в точках A_1 и A_2, а дальнюю – в точках B_1 и B_2 соответственно. Найдите длину отрезка B_1B_2, если $A_1A_2=6см$ и $PA_1:A_1B_1=2:3$.
5. Через точку *К,* лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены две прямые, а и в. Первая пересекает плоскости в точках A_1, B_1 соответственно, вторая в точках A_2 и B_2. Вычислите длину отрезка KA_1, если $A_1A_2:B_1B_2=3:4$, $A_1B_1=7см$.

Контрольная работа № 5
«Прямые и плоскости в пространстве»
Вариант – I

1. 1.

a) Могут ли скрещивающиеся прямые быть перпендикулярными?
b) Какие между собой две прямые перпендикулярные к одной плоскости?
c) Могут ли быть ⊥ к одной плоскости две стороны одного треугольника?
d) Прямая ⊥ к одной из двух пересекающихся плоскостей, может ли она быть ⊥ к другой
e) плоскости?
f) Если две плоскости ⊥ к одной прямой, каковы они между собой?
g) Сколько наклонных можно провести из одной точки к плоскости?
h) Может ли угол между прямой и плоскостью быть равен 70°?

2. Ребро куба MNKEM $_1$N $_1$K $_1$E $_1$ равно 6 см. Найдите расстояние d между прямыми:

а)ME и KK_1; б) KK_1 и N_1E_1.

3. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если AC=12 см., BD=15см, DC=16см.
4. Из точки K, к плоскости проведены две наклонные, равные 17 см. и 15см. Проекция одной из них на 4см. больше проекции другой. Найдите проекции наклонных.
5. Какие прямые называются перпендикулярными?

Вариант – II

1. 1.

a) Как расположены друг к другу рёбра, выходящие из одной вершины куба?

b) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, будет ли вторая прямая, тоже перпендикулярна к этой плоскости?

c) Могут ли быть $\perp$ к одной плоскости две стороны трапеции?

d) Что называют расстоянием от точки до плоскости?

e) Сколько перпендикуляров можно провести из одной точки к плоскости?

f) Может ли перпендикуляр быть длиннее наклонной , проведённой из этой же точки?

g) Может ли угол между прямой и плоскостью быть равен 120°?

2. Ребро куба $PDFEP_1D_1F_1E_1$ равно 4 см. Найдите расстояние d между прямыми: а)PE и FF_1; б) FF_1 и D_1E_1.
3. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если AC=4см., BD=8см, DC=8см.
4. Из точки K, к плоскости проведены две наклонные, одна из которых на 6см. длиннее другой. Проекции наклонных равны 17см. и 7см. Найдите длины наклонных.
5. Какие плоскости называются перпендикулярными?

Координаты и векторы в пространстве

«Действия над векторами»

Самостоятельная работа

Вариант I	**Вариант II**
1. Даны точки A (3; -1; 2) и B (5; 1; 1). Найдите координаты и абсолютную величину вектора $\overrightarrow{AB}$.	1. Даны точки A (-1; -3; 2) и C(3; 0; 2). Найдите координаты и абсолютную величину вектора $\overrightarrow{CA}$.
2. Найдите координаты точки C, если $\overrightarrow{AC}$ (-4; 0; 2), а точка A(3; -1; 2).	2.Найдите координаты точки D, если $\overrightarrow{CD}$(-1; - 4; 1), а точка C(3; 1; 0).
3. Даны точки A(-1; -3; 2), B(5; -1; -1), C(3; 0; 2). Найдите координаты точки D, если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.	3.Даны точки A(6; -4; 2), B(3; 2; 3), C(3; 5; -1). Найдите координаты точки D, если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.
4. Даны векторы $\vec{a}$(4; -8; 2) и $\vec{b}$(-6; 9; 3). Найти	4.Даны векторы $\vec{c}$ (3; -9; 6) и $\vec{d}$ (1; -2; 0). Найти

$2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.	$\frac{1}{3}\vec{c}+2\vec{d}$.

Скалярное произведение векторов

Решить задачи

1. Даны точки A (3; -2; 4), B(4; -1; 2), C(6; -3; 2), D(7; -3; 1). Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.
2. Даны вершины треугольника ABC, A(-1; -2; 4), B(-4; -1; 2) и C (-5; 6; -4).Найдите длину высоты BD.
3. Даны три силы $\vec{M}\ (3;-4;2), \vec{N}(2;3;-5), \vec{P}(-3;-2;4)$, приложенные к одной точке. Вычислите работу производимую равнодействующей этих сил, когда точка их приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из A(5;3;-7) и B(4;1;-4).

Самостоятельная работа

Вариант I	***Вариант II***
1)Найдите угол между векторами $\vec{a}(1;\ -3;0)$ и $\vec{d}(2;4;-2)$.	1)Найдите угол между векторами $\vec{b}(-2;\ 1;4)$ и $\vec{c}(3;-5;2)$.
2)Даны точки A(5;-8;-1), B(6;-8;-2), C(7;-5;-11), D(7;-7;-9). Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.	2)Даны точки A(1;0;2), B(2;1;0), C(0;-2;-4), D(-2;-4;-0). Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.
3)При каком значении n векторы $\vec{a}(4;\ 2n;-1)$ и $\vec{b}(-1;\ 1;n)$ перпендикулярны.	

Контрольная работа № 6
«Координаты и векторы в пространстве»
ВАРИАНТ – I

1. Заполните пропуски.

a) Вектором на плоскости называется …
b) Вектор изображается …
c) Модулем вектора называется …
d) Два вектора в пространстве называются противоположно направленными, если …
e) При умножении вектора на число …
f) Два вектора считаются равными, если …
g) Нулевой вектор коллинеарен …….. вектору.

2. Найдите расстояние между точками A и B, если A(1; 2; 3) и B (-2; -3; 1).
3. Найти координаты точки C, если $\overline{BC}(6;-12;-4)$, *а* $\overline{B}(2;6;-4)$
4. Докажите, что четырехугольник ABCD с заданными вершинами A (0; 0; 0), B (1; 0; 2), C (2; 1; 2), D (1; 1; 0) есть параллелограмм.
5. При каком значении n данные векторы $\vec{a}(4;2n;-1)$ *è* $\bar{b}(-1;1;n)$ перпендикулярны?
6. Вычислите угол между векторами: $\bar{a}(-3;4;0)$ *и* $\bar{b}(5;0;-12)$.

ВАРИАНТ – II

1. Заполните пропуски.
   a) Вектором в пространстве называется …
   b) Вектор обозначается …
   c) Длиной вектора называется …
   d) Два вектора в пространстве называются одинаково направленными, если …
   e) Для того, чтобы сложить два вектора, нужно …
   f) Нулевым вектором называется …
   g) Два вектора называются коллинеарными, если …

2. Найдите расстояние между точками A и B, если A(-1; -3; 0) и B (3; -4; 5).
3. Найти координаты точки C, если $\overline{AC}(7;-4;1)$, a $\overline{A}(1;-2;-9)$

4. Докажите, что четырехугольник ABCD с заданными вершинами A (0; 4; 0), B (2; 0; 0), C (4; 0; 4), D (2; 4; 4) есть ромб.
5. При каком значении n данные векторы $\vec{a}(n;-3;1)$ è $\overline{b}(2n;n;1)$ перпендикулярны?
6. Вычислите угол между векторами: $\overline{a}(-1;-2;3)$ и $\overline{b}(1;-2;-3)$.

Производная функции

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $(c)' = 0$, c - const
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $(a^x)' = a^x \ln a$
10. $(e^x)' = e^x$
11. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
12. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
17. $\left((kx+b)^{\alpha}\right)' = \alpha k(kx+b)^{\alpha-1}$

Правила и формулы дифференцирования

1. $(Cf(x))' = Cf'(x)$ - вынесение константы за знак производной.
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ - производная суммы равна сумме производных.
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ - производная произведения.

4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0$ - производная частного.

<u>Пример:</u>

1) Найти производную функций:

a)f(x) = $2x^3 - 3x^4 + 19$.

Решение.

$f'(x) = (2x^3 - 3x^4 + 19)' = (2x^3)' - (3x^4)' - 19' = 6x^2 - 12x^3 + 0 = 6x^2 - 12x^3$.

Задание №1 Найти производные элементарных функций.

1) $y = \sqrt{3}$

2) $y = x + 3$

3) $y = 3x$

4) $y = \sqrt{2} - x$

5) $y = \pi x - 0{,}7$

6) $y = \frac{x}{5} + 4$

7) $y = x^{\frac{7}{5}} - x + e^x$

8) $y = \cos x + 3\sin x$

9) $y = 3x^3 + 4x^2 + 2$

10) $y = 0{,}2x^5 - \frac{3}{4}x^4 - 6x + 8$

11) $y = \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{2}x^4 + x^2$

12) $y = x^2 \cdot \ln x$

13) $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^3}$

14) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

15) $y = 2\sin x \cdot (1 - \cos x)$

16) $y = \frac{2x^3}{\sqrt{x^3}}$

Задание №2. Найти значения производной функции в указанных точках.

1) $y = x\sqrt[4]{x}$ *x = 16*

2) $y = 1 - x^2 + \sqrt{x}$ *x =4*

3) $y = 3x^5 - 2x^4 + x\sqrt{x}$ *x= 1*

Тест.

Производная. Техника дифференцирования

ВАРИАНТ – I

1. Найдите производную функции $f(x) = -\frac{x^3}{6} + 1{,}5x^2 + 5x - 3$, вычислите её значение при $x = -2$.

а) -3; б) -5; в) 2; г) 3.

2. Найдите производную функции $g(x) = \frac{4-3x}{x+2}$.

а) $\frac{2}{(x+2)^2}$; б) $-\frac{10}{(x+2)^2}$; в) $\frac{10}{(x+2)^2}$; г) $-\frac{2}{(x+2)^2}$.

3. Найдите производную функции $f(x) = -x\sqrt{x}$.

а) $-\frac{2}{3\sqrt{x}}$; б) $-\frac{2\sqrt{x}}{3}$; в) $-1{,}5\sqrt{x}$; г) $-\frac{3}{2\sqrt{x}}$.

4. Найдите значение $f'(-0{,}5)$, если $f(x) = \frac{4}{3+2x}$.

а) $-0{,}5$; б) 4; в) -2; г) 0,5.

5. Дана функция $f(x) = 5cos^2x$ вычислите $f'\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

а) 5; б) -5; в) -10; г) 10.

6. $f(x) = (3x+4)\sqrt{x}$. Найдите $f'(1) - f(1)$.

а) $-7{,}5$; б) $-25{,}5$; в) 15,5; г) $-0,5$.

7. $g(x) = 3x + \frac{9}{x}$. Решите уравнение $g'(x) = 0$.

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}; 3$; в) $0; \sqrt{3}$; г) $-\sqrt{3}; \sqrt{3}$.

8. $f(x) = (4-x)(x+3)^2$. Решить неравенство $f'(x) > 0$.

а) $\left(-3; 1\frac{2}{3}\right)$; б) $\left(-1\frac{2}{3}; 3\right)$; в) $\emptyset$; г) $\left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

Тест

Производная. Техника дифференцирования

ВАРИАНТ – II

1. Найдите производную функции $f(x) = \frac{x^3}{6} - 0{,}5x^2 - 3x + 2$, вычислите её значение при $x = -1$.

а) $-2{,}5$; б) 1,5; в) $-1{,}5$; г) 2,5.

2. Найдите производную функции $g(x) = \frac{3+2x}{x-5}$.

а) $-\frac{13}{(x-5)^2}$; б) $\frac{8}{(x-5)^2}$; в) $\frac{-5}{(x-5)^2}$; г) $\frac{1-x}{(x-5)^2}$.

3. Найдите производную функции $f(x) = x\sqrt{x}$.

а) $\frac{3}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{2\sqrt{x}}{3}$; в) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$; г) $1{,}5\sqrt{x}$.

4. Найдите значение $f'(0{,}5)$, если $f(x) = \frac{3}{5-4x}$.

а) 3; б) $\frac{4}{9}$; в) $2\frac{2}{3}$; г) 2.

5. Дана функция $f(x) = 3sin^2 x$ вычислите $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
а) 6; б) -3; в) $-1{,}5$; г) 0,5.

6. $f(x) = (2x-3)\sqrt{x}$. Найдите $f'(1) + f(1)$.
а) 15; б) 7,5; в) 2,75; г) 0,5.

7. $f(x) = 4x + \frac{8}{x}$. Решите уравнение $f'(x) = 0$.
а) 0; 2; б) $\sqrt{2}$; в) $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$; г) $-\sqrt{2}; 2$.

8. $g(x) = (x-3)(x+2)^2$. Решить неравенство $g'(x) < 0$.
а) $\left(-1\frac{1}{3}; 2\right)$; б) $\left(-2;\ 1\frac{1}{3}\right)$; в) $(-2; 3)$; г) $(-0{,}5; 1)$.

Данный тест является проверочным тестом по алгебре и началам анализа. Количество заданий в тесте даёт возможность более полно проверить знания и навыки учащихся. Задания в тесте расположены по возрастанию степени трудности.

7-8 правильных ответов - ‹‹5››;

5-6 правильных ответов - ‹‹4››;

3-4 правильных ответов - ‹‹3››;

2 и менее правильных ответов - ‹‹2››.

Производная сложной функции

Формула производной сложной функции:

$$h(x) = g(f(x))$$
$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

<u>Пример:</u>

$y = \left(x^2 - 5x + 8\right)^6$

Решение.

$$y' = \left(\left(x^2 - 5x + 8\right)^6\right)' = 6\left(x^2 - 5x + 8\right)^5 \cdot \left(x^2 - 5x + 8\right)' = 6\left(x^2 - 5x + 8\right)^5 \cdot (2x - 5)$$

Задание №1. Найти производные следующих сложных функций.

1) $y = \left(x^3 - 2x^2 + 2\right)^3$;
2) $y = \left(x^5 - 2\right)^6$;
3) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$;
4) $y = \dfrac{1}{\left(1 - x^3\right)^5}$;
5) $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 1}$;

Производная сложной функции

1.Найдите производные функций:

1) a) $f(x) = (2x-7)^8$;

b) $f(x) = (9x+5)^4$;

c) $f(x) = \frac{1}{(5x+1)^8}$;

d) $f(x) = \frac{1}{(6x-1)^5}$;

e) $f(x) = \left(3 - \frac{x}{2}\right)^{-9}$;

f) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x - 7\right)^8 - (1-2x)^4$.

2. Найдите значение производной функции в точке x_0:

a) $f(x) = (3x-2)^7, x_0 = 1$;

b) $f(x) = \frac{4}{12x-5}, x_0 = 2$;

c) $f(x) = \sqrt{6x-1}, x_0 = 5$;

d) $f(x) = \sqrt{4-8x}, x_0 = 0$.

Самостоятельная работа

Вариант I	***Вариант II***
1.Найдите производные функций: a) $f(x) = (2x+3)^5$; b) $f(x) = \frac{1}{(4-5x)^7}$; c) $f(x) = \sqrt{7x+4}$;	1.Найдите производные функций: a) $f(x) = (2x+1)^6$; b) $f(x) = \frac{1}{(5-3x)^7}$; c) $f(x) = \sqrt{9x+4}$;
2.Найдите значение производной функции в точке x_0: a) $f(x) = (2x+3)^{12}, x_0 = -2$; b) $f(x) = \sqrt{25-9x}, x_0 = 1$;	2.Найдите значение производной функции в точке x_0: a) $f(x) = (5+6x)^{10}, x_0 = -1$; b) $f(x) = \sqrt{11-5x}, x_0 = -1$;
3.Найдите производную функции f: a) $f(x) = (3-x^3)^5 + \sqrt{2x-7}$; b) $f(x) = \sqrt{1-x^4} + \frac{1}{x^2+3}$.	

Производная тригонометрических функций.

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad$ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\qquad$ $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

<u>Производная тригонометрических функций</u>

I. Найдите производную каждой из функций:

1) $y = 1 - \frac{1}{2}\sin x;$
2) $y = x + 2\cos x;$
3) $y = 2\sin x + 1{,}5\cos x;$
4) $y = \frac{1}{2}tgx;$
5) $y = \cos 4x;$
6) $y = \sin(5 - 7x);$
7) $f(x) = x^3 \cdot \sin 2x;$
8) $f(x) = x^4 + tg2x;$
9) $f(x) = \frac{\cos 3x}{x};$
10) $f(x) = \sin x + tg\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$

II. Найдите $f'(0)$ и $f'(\pi)$, если;

1) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x - \pi);$
2) $f(x) = x - tg(-2x);$
3) $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right);\ f(x) = 2\cos\frac{x}{2}.$

Самостоятельная работа

ВАРИАНТ - I	**ВАРИАНТ - II**
1. Найдите производные функций:	
à) $f(x) = x^3 + \cos x$	a) $f(x) = x^5 - \sin x$
á) $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$	á) $f(x) = \cos 2x - \sin 3x$
â) $f(x) = tgx - ctg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	â) $f(x) = ctgx + tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
2. Найдите производные функций:	

a) $f(x) = x \cdot \sin x$; b) $y = \frac{1}{3}\cos 6x$; c) $y = \cos(9 - 5x)$.	*a)* $f(x) = x \cdot \cos x$; *b)* $y = \frac{1}{2}\sin 4x$; *c)* $y = \sin(3x - 9)$.
3. Найдите значение производной функции точке x_0:	
$f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), x_0 = \frac{\pi}{6}$; $f(x) = tg\left(2x - \frac{\pi}{8}\right), x_0 = \frac{\pi}{16}$;	$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right), x_0 = \frac{\pi}{12}$; $f(x) = tg\left(3x - \frac{\pi}{4}\right), x_0 = \frac{\pi}{12}$;

Уравнение касательной в общем виде

Уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

<u>Пример:</u> Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции

$f(x) = 7x - 5\sin x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Решение: Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен значению производной этой функции в данной точке x_0. Найдём производную данной функции: $f'(x) = 7 - 5\cos x$. Вычислим её значение при заданном значении аргумента:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7 - 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7 - 5 \cdot 0 = 7.$$

Ответ: 7

<u>Пример:</u> Написать уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1, x_0 = 2.$$

Решение: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

1) $f(x_0) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$;
2) $f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)' = 3x^2 - 4x$;
3) $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4$;
4) $y = 1 + 4(x - 2) = 1 + 4x - 8 = 4x - 7$.

Ответ: y=$4x - 7$.

Самостоятельная работа
Касательная к графику функции

1. Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через данную точку M графика функции f.
   a) $f(x) = x^3; M(-1; -1)$;
   b) $f(x) = x^2 + 2x; M(1; 3)$;
   c) $f(x) = 1 + \sin x, M(\pi; 1)$;

d) $f(x) = -\cos x, M(-\pi; 1)$.

2. Написать уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0.
   a) $f(x) = 2x - x^2, x_0 = -1$;
   b) $f(x) = 1 + \cos x, x_0 = \frac{\pi}{2}$.
3. Найдите точки графика функции, в которых касательная параллельна оси абсцисс:
   a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$;
   b) $f(x) = 2\cos x + x$.

Признак возрастания (убывания) функций

Пример . Исследовать функцию на экстремумы. Определить промежутки возрастания и убывания функции.

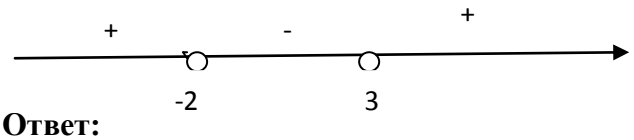
$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x$.

Решение:

1) $D(y) = R$;
2) $y' = (2x^3 - 3x^2 - 36x)' = 6x^2 - 6x - 36$;
3) $y' = 0, 6x^2 - 6x - 36 = 0; x^2 - x - 6 = 0$;

$D = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25$;

$b = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2}; x_1 = -2, x_2 = 3$



Ответ:

функция возрастает при $x \epsilon (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$;

функция убывает при $x \epsilon [-2; 3]$.

Самостоятельная работа

Исследовать функцию на экстремумы. Определить промежутки возрастания и убывания функции

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;

b) $f(x) = 4x^3 - 1{,}5x^4$;

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2$.

Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции

Пример 2: Найти наибольшее, наименьшее значение функции $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке [1;4].

Решение:

$f'(x) = (3x^2 - 12x + 1)' = 6x - 12$;

$f'(x) = 0;\ 6x - 12 = 0$;

$x = 2$;

$x = 2 \in [1; 4]$.

Находим значение функции в точках 1; 2; 4.

$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 1 = -8;$

$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 1 = -11;$

$f(4) = 3 \cdot 4 - 12 \cdot 4 + 1 = 1.$

Ответ: $max f(x) = f(4) = 1$ на $[1;4]$; $min f(x) = f(2) = -11$ на $[1;4]$.

Самостоятельная работа

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанном промежутке.

a) $y = 1/3\ x^3 + x^2$, [1;4];
b) $y = x^4 - 8x^2 - 9$, [-3;3];
c) $y = (x-3)^2(x-2)$, [-4;1].

Исследование функции с помощью производной

Пример: Исследовать функцию $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ и построить ее график.

Решение.

1) Область определения – множество действительных чисел.

2) Точки пересечения с осями координат:

если x = 0, то y = 0 – точка A (0,0);

если y = 0, то решим уравнение $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 = 0$.

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 = 0 \Rightarrow x^2\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} - 1\right) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} - 1 = 0 \,\Big|\cdot 12$$

$$x_1 = 0 \qquad 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-12)}}{6} = \frac{4 \pm 4\sqrt{10}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{10}}{3} \approx 2{,}8 \quad \text{и} \quad x_3 = \frac{2 - 2\sqrt{10}}{3} \approx -1{,}4$$

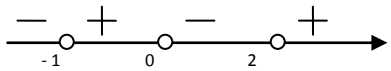
Получили еще две точки B ($\frac{2+2\sqrt{10}}{3}$; 0) и C ($\frac{2-2\sqrt{10}}{3}$; 0).

3) Четность, нечетность: $y(-x) = \frac{(-x)^4}{4} - \frac{(-x)^3}{3} - (-x)^2 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$ - функция не является ни четной, ни нечетной.

4) Находим производную.

$$y' = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)' = 4 \cdot \frac{x^3}{4} - 3 \cdot \frac{x^2}{3} - 2x = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2).$$

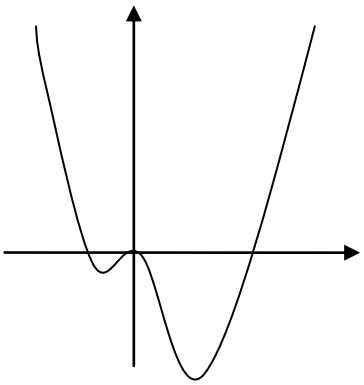
5) Стационарные точки. Приравняем производную к нулю: $x(x+1)(x-2) = 0$, получим x = -1, x = 0, x= 2 – стационарные точки.



6) Промежутки возрастания и убывания. Найденные точки разбивают числовую прямую на четыре промежутка, определим знак производной на этих промежутках.

7) Точки экстремума. x = -1, x = 2 – точки минимума; x = 0 – точка максимума.

8) Выпуклость и точки перегиба.



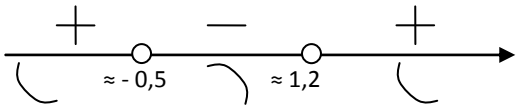
Найдем вторую производную: $y'' = \left(x^3 - x^2 - 2x\right)' = 3x^2 - 2x - 2$.

Найдем точки перегиба: $y'' = 0$;

$3x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \approx 1{,}2$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{3} \approx -0{,}5$ - точки перегиба

Определим знак второй производной на интервалах:



9)Составим таблицу

x	x < -1	- 1	– 1 < x < 0	0	0 < x < 2	2	x > 2	3
f ‘(x)	-	0	+	0	-	0	+	
f(x)	↘	-5/12 min	↗	0 max	↘	-8/3 min	↗	9/4

Решить самостоятельно

Исследовать функцию и построить ее график.

1) $f(x) = x^3 - 3x^2$;

2) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 1\frac{1}{3}x^3$;

3) $f(x) = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$.

Контрольная работа № 7
«Производная функции»
ВАРИАНТ - I

1. Найдите производную данной функции:

а) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + 4$

б) $g(x) = 3x - \frac{1}{x^3}$

в) $\varphi(x) = \frac{1}{2}\cos x$

2. Найдите производную функции f и вычислите ее значение в указанной точке:

а) $f(x) = x\sin x,\ x = \frac{\pi}{2}$

б) $f(x) = (2x-3)^6,\ x = 1$

в) $h(x) = \frac{3+2x}{x-2},\ x = 1$

3. Найдите точки, в которых производная данной функции равна нулю:

а) $f(x) = 2\sin x - \sqrt{3}x$

б) $f(x) = x^3 - 3x^2$

ВАРИАНТ – II

1. Найдите производную данной функции:

а) $f(x) = -2x^4 + \frac{1}{3}x^6 - 1$

б) $g(x) = \frac{2}{x^4} + x$

в) $\varphi(x) = 3\sin x$

2. Найдите производную функции f и вычислите ее значение в указанной точке:

а) $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right),\ x = \frac{\pi}{4}$

б) $f(x) = \frac{x^2-2}{x},\ x = -1$

в) $f(x) = (5+6x)^{10},\ x = -1$

3. Найдите точки, в которых производная данной функции равна нулю:

а) $f(x) = \sqrt{2}\cos x + x$

б) $f(x) = x^4 - 2x^2$

Контрольная работа № 8
«Применение производной к исследованию функции»
ВАРИАНТ – I

1.Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 1$ в точке его с абсциссой x_0 =2.

2.Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику данной функции через его точку с указанной абсциссой: $f(x) = 8x - x^4,\ x_0 = -2$.

3. Дана функция $f(x) = -x^3 + 3x + 2$:

а) найдите промежутки возрастания и убывания функции;

б) найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке [1; 3].

4. Найдите точки экстремума функции:

$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^4 - 8$.

5.Число 48 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых таким образом, чтобы два из них были равны между собой, а произведение всех слагаемых было наибольшим.

ВАРИАНТ – II

1.Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 2x$ в точке его с абсциссой x_0 = -2. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику данной функции через его точку с указанной абсциссой: $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x,\ x_0 = 2.$

3.Дана функция $f(x) = x^3 - 3x - 6$:

а) найдите промежутки возрастания и убывания функции;

б) найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке [-2; 0].

4. Найдите точки экстремума функции

$f(x) = 4x^3 - \frac{3}{2}x^4 - 8$

5.Число 72 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых таким образом, чтобы два из них были пропорциональны числам 1и 3, а произведение всех слагаемых было наибольшим.

Итоговая контрольная работа № 9

ВАРИАНТ – I

1. Решить неравенство

$\frac{7x+x^2}{12x-1} < 0.$

2. Решить уравнения:

а)$\sin x + \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1;$

б)$2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2};$

в) $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0.$

3. Найдите значение производной функции:

а) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 2$ при x=1;

б) $f(x) = \frac{2x-5}{4-x}$ при x=2.

4. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -1.$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ на отрезке $[-4; 4]$.

6.Исследуйте функцию и постройте ее график

$f(x) = 4x^2 - 0{,}5x^4$.

ВАРИАНТ – II

1. Решить неравенство:

$\frac{4x^2-11x}{x-7} < 0.$

2. Решить уравнения:

а) $\sin x + \cos(2\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1;$

б) $2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 1;$

в) $2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0.$

3. Найдите значение производной функции:

а) $f(x) = x^3 - 2x + 3$ при x= -1;

б) $f(x) = \frac{3x-4}{2-x}$ при x=4.

4. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -4.$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке $[-2; 1].$

6. Исследуйте функцию и постройте ее график

$$f(x) = x^4 - 4x^2 .$$

II курс

Интеграл и его применение

Первообразная функции

Таблица первообразных

Функция	**Общий вид первообразных**
k (*постоянная*)	$kx + C$
$x^n (n \in k, n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{X}}$	$2\sqrt{X} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 X}$	$tgx + C$
$\frac{1}{Sin^2 X}$	$-ctgx + C$
$\frac{1}{x}$	$\ell n\ \lvert x \rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x, a \geq 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ell na} + C$

Три правила нахождения первообразных

$$(F + G)' = f + g;$$

$$k(F)' = kf;$$

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = f(kx+b)$$

<u>Пример:</u>

1) Найдите все первообразные функции $f(x) = 2x^5 + 4x^2 + 2x + 1$.
2) Является ли функция $F(x) = x^2 + 3x - 5$ первообразной функции $f(x) = 3(x^2 + 1)$?
3) Найдите первообразную функции $f(x) = 3x - 5$, график которой проходит через точку (4;10).
4) Найдите какую - нибудь первообразную функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, которая принимает отрицательное значение при x= -1.

1)$F(x) = \frac{2x^{5+1}}{5+1} + \frac{4x^{2+1}}{2+1} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} + 1 \cdot x + C;$ $F(x) = \frac{2x^6}{6} + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x + C;$ $F(x) = \frac{x^6}{3} + \frac{4x^3}{3} + x^2 + x + C.$ ***Ответ:*** $\boldsymbol{F(x) = \frac{x^6}{3} + \frac{4x^3}{3} + x^2 + x + C.}$	Находим первообразную функции по формуле (1) и (2). Сокращаем дроби. Записываем ответ.
2) $F'(x) = (x^2 + 3x - 5)' = 2x + 3 \neq f(x).$ Ответ: F(x) не является первообразной для $f(x)$.	Нужно проверить выполнение равенства $F'(x) = f(x)$. Если равенство выполняется, то является, если нет, то F(x) не является первообразной для функции $f(x)$.
3) $F(x) = \frac{3x^2}{2} - 5x + C;$ *точка (4;10);* *10 =* $\frac{3\cdot(4)^2}{2} - 5 \cdot 4 + C;$ $10 = \frac{3\cdot 16}{2} - 20 + C;$ *10=24-20+C;* *10=4+C;* *C=10-4;* *C=6.* ***Ответ:*** $\boldsymbol{F(x) = \frac{3x^2}{2} - 5x + 6.}$	Находим первообразную заданной функции. Из заданной точки определяем значение x и y. Подставляем в первообразную значения x и y. Преобразовываем выражение и находим значение C. Записываем ответ, подставляя в значение первообразной полученное значение C.
4)$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + 5x + C;$	Находим первообразную заданной функции. По условию x= -1, тогда в

$F(x)=\frac{x^4}{4}-x^3+5x+C;$ $F(-1)=\frac{(-1)^4}{4}-(-1)^3+5(-1)+C;$ $F(-1)=\frac{1}{4}+1-5+C;$ $F(-1)=\frac{1}{4}-4+C;$ $F(-1)=\frac{1}{4}-3\frac{4}{4}+C;$ $F(-1)=-3\frac{3}{4}+C;$ $F(-1)<0; -3\frac{3}{4}+C<0;$ $C<3\frac{3}{4}$. Пусть С=3. ***Ответ:*** $\boldsymbol{F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+5x+3}$.	полученную функцию вместо х подставляем -1, то есть находим $F(-1)$. Производная по условию принимает отрицательное значение, значит $F(-1)<0$. Находим какому условию удовлетворяет С и выбираем любое соответствующее значение.

Самостоятельная работа №2

Вариант I	**Вариант II**
1)Найдите все первообразные функции $f(x)=x^3-3x^2+x-1$.	1)Найдите все первообразные функции $f(x)=2x^3-6x^2+x-1$.
2)Является ли функция $F(x)=x^4-3x^2+1$ первообразной функции $f(x)=4x^3-x^2+x$?	2)Является ли функция $F(x)=2x^3-3x^2+1$ первообразной функции $f(x)=6x(x-1)$?
3)Найдите первообразную функции $f(x)=4-x^2$, график которой проходит через точку (-3;10).	3)Найдите первообразную функции $f(x)=2x^2+3$, график которой проходит через точку (-2;-5).
4)Найдите какую - нибудь первообразную функции $f(x)=4x^3-x^2+2$, которая принимает отрицательное значение при x= 1.	4)Найдите какую - нибудь первообразную функции $f(x)=2x^3+x^2+3$, которая принимает положительное значение при x= -1.

Дополнительное задание.

5)Найдите первообразную функции $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, график которой проходит через точку М$\left(\frac{2\pi}{3}; -1\right)$.

6) Является ли функция $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ первообразной функции $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$?

Найти первообразную функций:

1) $f(x) = x^3 - 6\cos x + 3;$
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6;$
3) $f(x) = x^7 - \frac{3}{sin^2 x};$
4) $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x;$
5) $f(x) = (2x - 3)^5;$
6) $f(x) = 3\sin 2x;$
7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-5x}} - 4cosx;$
8) $f(x) = \frac{2}{x^4} + 4\cos 5x;$
9) $f(x) = \frac{1}{cos^2 x} + sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right);$
10) $f(x) = \frac{1}{(3x-5)^3}.$

Самостоятельная работа

<u>Первообразная функции</u>

Вариант I	**Вариант II**
1)Найдите первообразную функций:	1)Найдите первообразную функций:
a) $f(x) = 4x^3 - 6x^2;$ b) $f(x) = -3\sin x + \frac{1}{cos^2 x};$ c) $f(x) = x^9 + \frac{2}{sin^2 x}.$	a) $f(x) = 5x^4 - 3x^5;$ b) $f(x) = -4\cos x + \frac{1}{sin^2 x};$ c) $f(x) = x^6 + \frac{5}{cos^2 x}.$
2)Найдите первообразную функций:	2)Найдите первообразную функций:
a) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right);$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 3\sin 2x;$ c) $f(x) = \frac{1}{(7x-3)^2};$ d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-7x}} + 2\cos x.$	a) $f(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right);$ b) $f(x) = \frac{4}{x^5} - 2\cos 3x;$ c) $f(x) = \frac{1}{(8x-3)^2};$ d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-11x}} - 3\sin x.$
3)Для данной функции найдите ту первообразную, график которой проходит через	3)Для данной функции найдите ту первообразную, график которой проходит через

данную точку М: $f(x) = 2\cos x\,; M(\frac{\pi}{6}; 1)$	данную точку М: $f(x) = 2\sin 2x\,; M(0; 1)$

Интеграл

$\int_a^b f(x)\ dx = F(x) = F(b) - F(a)$ - формула Ньютона Лейбница

$f(x)$- подынтегральная функция

$F(x)$ – первообразная функции $f(x)$

a, b –пределы интегрирования

<u>Пример:</u>

1)$\int_{-1}^{3} x^3\,dx = \frac{x^4}{4} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$	Подынтегральная функция $\boldsymbol{x^3}$, её первообразная $\boldsymbol{\frac{x^4}{4}}$
2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\ dx = \sin x = \sin\pi - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1$	Подынтегральная функция $\boldsymbol{\cos x}$, её первообразная $\boldsymbol{\sin x}$
3) $\int_{-1}^{2}(1 - 3x^2)\ dx = \left(1 \cdot x - \frac{3x^3}{3}\right) = (x - x^3) = (2 - 2^3) - (-1 - (-1)^3) = (2 - 8) - (-1 + 1) = -6 + 0 = -6$	Подынтегральная функция $(1 - 3x^2)$, её первообразная $\left(1 \cdot x - \frac{3x^3}{3}\right) = (x - x^3)$

I) Вычислить определённый интеграл:

1)$\int_{-\frac{2}{3}}^{1} x^3\,dx$; 2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos2x\,dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{sin^2(x+\frac{\pi}{3})}dx$; 4) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$.

<u>Решить самостоятельно:</u>

1)$\int_{-1}^{2} x^4\,dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sin^2 x}$; 3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin\frac{x}{3}\,dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{7}{cos^2 3x}\,dx$;

5) $\int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{dx}{\sqrt{10-3x}}$.

Самостоятельная работа

Вариант I

Вычислить интегралы:

1) $\int_0^3 x^2 dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx$; 3)$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2 x}\ dx$; 4)$\int_{-3}^{2}(2x - 3)\ dx$; 5)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x\ dx$.

Вариант II

Вычислить интегралы:

1) $\int_0^5 x\,dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; 3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin^2 x}\,dx$; 4) $\int_{-2}^{-1}(5-4x)\,dx$; 5) $\int_0^{\pi} \cos 3x\,dx$.

Дополнительные задания:

1) $\int_0^2 (3x^2-4x+5)\,dx =$

2) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x-\frac{\pi}{6}) =$

Применение интеграла вычислению физических величин и площадей

Формула Ньютона—Лейбница

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y=\cos x\,; y=0; x=-\frac{\pi}{4}; x=\frac{\pi}{4}$.

2) $y=2-2sinx; y=0; x=0; x=\frac{\pi}{2}$.

Решить самостоятельно:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y=\sin x\,; y=0; x=\frac{\pi}{2}$.

2) $y=1+\frac{1}{2}cosx; y=0; x=-\frac{\pi}{2};\ x=\frac{\pi}{2}$.

Самостоятельная работа

Вариант I	***Вариант II***
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, предварительно сделав рисунок.	
1)$f(x)=x^2, y=0, x=-3, x=-2$. 2)$f(x)=\sin x\,, y=0, x=\pi, x=2\pi$. 3)$y=x^2-1, y=0; x=1; x=2$.	1)$f(x)=x^2, y=0, x=-3, x=-1$. 2)$f(x)=\cos x\,, y=0, x=-\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}$. 3)$y=x^2-2, y=0; x=2; x=3$.
4)Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=x^2-6x+8$, прямыми $x=-2, x=-1$ и осью абсцисс.	4)Найдите площадь фигуры, ограниченной осями координат, графиком функции $f(x)=x^2+8x+16$ и прямой $x=-2$.

Дополнительное задание.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, предварительно сделав рисунок.

1)$y=\sin x; y=\frac{1}{2}\,; x=\frac{\pi}{6}; x=\frac{5\pi}{6}$.

2) $y = x^2 - 4x; y = 0; x = -\frac{3}{2}; x = -\frac{1}{2}.$

Контрольная работа № 1
«Интеграл и его применение»
ВАРИАНТ – I

1. Найдите все первообразные функции:
   $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 1.$
2. Вычислить интеграл:
   $a)\ \int_1^2 x^4 dx;\quad á)\ \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;\quad â)\ \int_0^1 (2x+1)dx;\quad ã)\ \int_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции y =cosx, осью абсцисс и прямыми $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{3}.$
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=x^2-6x+8$, прямыми x= -2, x= -1 и осью абсцисс.
5. Для функции *f(x)* = 3sin x найдите:
   a) множество всех первообразных;
   b) первообразную, график которой проходит через точку M ($\frac{\pi}{2}$; 0)

ВАРИАНТ –II

1. Найдите все первообразные функции:
   $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 2.$
2. Вычислить интеграл:
   $a)\ \int_1^3 x^2 dx;\quad á)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx;\quad â)\ \int_0^2 (3x+2)dx;\quad ã)\ \int_1^{11} \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции y =sinx, осью абсцисс и прямыми $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{3}.$
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной осями координат, графиком функции $f(x)=x^2+8x+16$ и прямой x= -2 .
5. Для функции *f(x)* = 2*cos x* найдите:
   a) множество всех первообразных;
   b) первообразную

Многогранники
Прямоугольный параллелепипед

Решить задачи:

1. Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям: 3см, 5см, 8см.

2. В прямом параллелепипеде стороны основания 6м и 8м образуют угол 45^0, боковое ребро равно 4м. Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.

3. Основание пирамиды – параллелограмм, у которого стороны 3см и 4см, а одна из диагоналей 4см. Высота пирамиды проходит через точки пересечения диагоналей, она равна 5см. Найдите боковые рёбра пирамиды.

4. Основание пирамиды - прямоугольный треугольник с катетами 12см и 5см. Высота пирамиды проходит через середину гипотенузы треугольника и равна гипотенузе. Найдите боковые рёбра пирамиды.

Решение задач
«Пирамида»

Задача 1.
Чему равна площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды со стороной в основании 4,5см и апофемой 5см?
Задача 2.
Вычислите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной в основании 6 дм и апофемой 4дм.
Задача 3.
Вычислите боковое ребро треугольной пирамиды, высота которой проходит через центр окружности, описанной около основания, если стороны основания пирамиды равны 4дм, 4дм и 4,8дм, а высоты равна 6дм.

Решить самостоятельно

1. Чему равна площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды со стороной в основании 3см и апофемой 8см?
2. Вычислите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной в основании 4дм и апофемой 10дм.
3. Вычислите боковое ребро треугольной пирамиды, высота которой проходит через центр окружности, описанной около основания, если стороны основания пирамиды равны 50см, 78смм и 112см, а высоты равна 72см.

Тест «Призма и пирамида»	
1.Определение призмы	a) Многогранник, составленный из двух n-угольников и n-параллелограммов. b) Многогранник, составленный из двух равных n-угольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n- параллелограммов. c) Многогранник, составленный из n-угольников и n-параллелограммов. d) Многогранник, составленный из двух равных n-угольников и n-параллелограммов.
2.Что представляет собой боковая поверхность призмы?	a) Параллелограмм b) Круг c) Прямоугольник d) Треугольник
3. Определение прямой призмы.	a) Если боковые ребра параллельны основанию. b) Если боковые ребра перпендикулярны основанию. c) Если боковые ребра равны. d) Если боковые ребра параллельны.

4. Определение правильной призмы.	a) Прямая призма называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник. b) Призма называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник. c) Прямая призма называется правильной, если в основании лежит многоугольник. d) Призма называется правильной, если в основании лежит многоугольник.
5. Сколько боковых граней имеет треугольная призма?	a) Одну. b) Две. c) Три. d) Много.
6.Площадь боковой поверхности призмы.	a) $S=\pi r^2$ b) $S=2\pi p$ c) $S=\pi r$ d) $S=pl$
7. Площадь полной поверхности призмы.	a) $2S_{бок.}+S_{осн.}$ b) $2S_{бок.}+2S_{осн.}$ c) $S_{бок.}+S_{осн.}$ d) $S_{бок.}+2S_{осн.}$
8. Что представляет собой боковая поверхность прямой призмы?	a) Параллелограмм b) Круг c) Прямоугольник d) Треугольник
9. Какая фигура не может быть в основании призмы?	a) Трапеция b) Круг. c) Треугольник. d) Квадрат.
10. Сколько оснований имеет правильная призма?	a) Одно. b) Два. c) Три. d) Много.

Тест по теме «Правильные многогранники»

1. Дан тетраэдр ABCD, у которого противоположными ребрами являются:

a) AC и DB;
b) AC и CD;
c) AB и DA;
d) AC и DA.

2. Апофема это:

a) высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины;
b) высота пирамиды;
c) высота боковой грани пирамиды;
d) нет верного ответа.

3. Если все боковые ребра пирамиды равны, то:

a) основание высоты пирамиды является центром окружности, описанной около основания пирамиды;
b) пирамида правильная;
c) основание высоты пирамиды является центром окружности, вписанной в основание пирамиды;
d) нет верного ответа.

4. Дан тетраэдр MNPK, его противоположными ребрами не являются:
a) PM и PK;
b) MN и PK;
c) AB и DA;
d) AC и DA .

5. Сколько вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) имеет треугольная пирамида?
a) В = 4, Р = 6, Г = 4.
b) В = 6, Р = 4, Г = 6.
c) В = 6, Р = 6, Г = 4.
d) В = 4, Р = 4, Г = 6.

6. Сколько вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) имеет четырехугольная пирамида?
a) В = 5, Р = 8, Г = 5.
b) В = 8, Р = 8, Г = 5
c) В = 5, Р = 5, Г = 8.
d) В = 5, Р = 8, Г = 8.

7.Сколько вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) имеет шестиугольная пирамида?
a) В = 7, Р = 12, Г = 7.
b) В = 12, Р = 12, Г = 7.
c) В = 7, Р = 12, Г = 12.
d) В = 12, Р = 7, Г = 7.

Контрольная работа № 2
«Многогранники»
ВАРИАНТ – I

1. 1.

1.1. Выберите верное утверждение

а) параллелепипед состоит из шести треугольников;

б) противоположные грани параллелепипеда имеют общую точку;

в) диагонали параллелепипеда пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

1.2.Количество ребер шестиугольной призмы

а) 18; б) 6; в) 24; г) 12; д) 15.

1.3.Наименьшее число граней призмы

а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 9.

1.4.Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется

а) диагональю; б) медианой; в) апофемой.

1.5. Диагональ многогранника – это отрезок, соединяющий

а) любые две вершины многогранника; б) две вершины, не принадлежащие одной грани;

в) две вершины, принадлежащие одной грани.

2. Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям: 3см, 6см, 3см.
3. В прямом параллелепипеде стороны основания 3м и 5м образуют угол 30^0, боковое ребро равно 4м. Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.
4. Основание пирамиды - прямоугольный треугольник с катетами 4см и 3см. Высота пирамиды проходит через середину гипотенузы треугольника и равна гипотенузе. Найдите боковые рёбра пирамиды.

ВАРИАНТ- II

1.

1.1. Выберите верное утверждение
а) тетраэдр состоит из четырех параллелограммов;
б) отрезок, соединяющий противоположные вершины параллелепипеда, называется его диагональю;
в) параллелепипед имеет всего шесть ребер.
1.2. Количество граней шестиугольной призмы
а) 6; б) 8; в) 10; г) 12; д) 16.
1.3.Наименьшее число рёбер призмы
а) 9; б) 8; в) 7; г) 6; д) 5.
1.4. Апофема – это
а) высота пирамиды; б) высота боковой грани пирамиды;
в) высота боковой грани правильной пирамиды.
1.5. Усеченная пирамида называется правильной, если
а) ее основания – правильные многоугольники;
б) она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию;
в) ее боковые грани – прямоугольники.

2. Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям: 1см, 2см, 2см.
3. В прямом параллелепипеде стороны основания 4см и 6см, угол между ними 60^0. Боковая поверхность равна $144см^2$. Найдите полную поверхность параллелепипеда.
4. Основание пирамиды – параллелограмм, у которого стороны 3см и 7см, а одна из диагоналей 6см. Высота пирамиды проходит через точки пересечения диагоналей, она равна 4см. Найдите боковые рёбра пирамиды.

Корни и степени

Вычисление и сравнение корней. Выполнение расчётов с радикалами.

Самостоятельная работа

Вычислить:

Вариант I	Вариант II
1) $-2\cdot\sqrt[3]{27}$	1) $-0{,}5\cdot\sqrt[4]{16}$
2) $\sqrt[4]{625}-\sqrt[3]{-125}$	2) $\sqrt[5]{32}+\sqrt[3]{-8}$
3) $\sqrt[3]{8\cdot 27}$	3) $\sqrt[4]{625\cdot 16}$
4) $\sqrt[3]{5^6}\cdot\sqrt[3]{8}$	4) $\sqrt[4]{5^8}\cdot\sqrt[4]{16}$

Решить уравнения:	Преобразуйте выражения:
a) $x^4 = 64$; b) $x^5 = -\frac{1}{243}$; c) $x^4 = -16$	a) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[8]{4}; b)\ \frac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[3]{320}}; c)\left(\sqrt[6]{\frac{27}{8}}\right)^2; d)\sqrt{\frac{a^4 \cdot b^2}{c^8}}$

Нахождение значений степеней с рациональными показателями. Сравнение степеней.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

   а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{17}$; в) $\sqrt[8]{a^{12}}$; г) $\sqrt[4]{a^{-5}}$.

2. Представьте выражение в виде корня из числа или выражения:

   а) $7^{\frac{3}{5}}$; б) $5x^{\frac{-2}{3}}$; в) $(6a)^{\frac{3}{7}}$; г) $(x-y)^{\frac{1}{2}}$.

3. Вычислите:

   а) $16^{\frac{1}{4}}$; б) $8^{\frac{2}{3}}$; в) $3^{-2} \cdot 8^{\frac{1}{3}}$; г) $0{,}01^{\frac{-1}{2}}$; д) $64^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} \cdot (8^0)^{-3}$.

Вариант II

1. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

   а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt[5]{16}$; в) $\sqrt[7]{m^{11}}$; г) $\sqrt[3]{b^{-7}}$.

2. Представьте выражение в виде корня из числа или выражения:

   а) $9^{\frac{8}{11}}$; б) $7y^{\frac{-2}{5}}$; в) $(5x)^{\frac{4}{9}}$; г) $6(a-b)^{\frac{1}{3}}$.

3. Вычислите:

   а) $121^{\frac{1}{2}}$; б) $8^{\frac{4}{3}}$; в) $2^{-2} \cdot 16^{\frac{1}{2}}$; г) $0{,}001^{\frac{-1}{3}}$; д) $625^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot (32^0)^{-5}$.

Степень с рациональным показателем

1. Упростить выражения: $a)\ \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; $б)\ \frac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$.

2. Найти значения выражения:

   $a) 9^{\frac{3}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$; $б) 25^{1,5} + (0{,}25)^{-0,5} - 81^{0,75}$.

3. Упростить: $a) a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{5}{3}} a^{\frac{1}{6}} b^{-\frac{1}{6}}$; $б) a^{-\frac{9}{2}} b^{\frac{1}{12}} : \left(a^{-\frac{19}{4}} b^{\frac{1}{3}}\right)$.

4. Вычислите: а) $6^{\frac{1}{3}} \cdot 18^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}}$; б) $\frac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{-\frac{1}{6}}}$.

5. Вычислите $\frac{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}$ при $a = 4, b = 11$.

<u>Решить самостоятельно:</u>

1) Упростить выражения: $а)\ \frac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m-n}$; $б)\ \frac{p^{\frac{1}{2}} - 5}{p-25}$.

2) Найти значения выражения:

$$а)\ 16^{\frac{5}{4}} + 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}; \qquad б)\ 9^{1,5} - (0,5)^{-2} - 81^{0,5}.$$

3) Упростить: $а)\ a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{7}{12}} a^{\frac{-3}{4}} b^{-\frac{2}{3}}$; $б)\ a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{5}{24}} : \left(a^{\frac{5}{12}} b^{\frac{-1}{8}}\right)$.

4) Вычислите: а) $10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$; б) $\frac{5^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{6}}}$.

5) Вычислите $\frac{b^{\frac{5}{4}} c^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} c^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{5}{4}} c^{\frac{5}{4}}}$ при $b = 2, c = 5$.

Решение иррациональных уравнений

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называют иррациональными.

Схемы решения иррациональных уравнений:

$$\sqrt{f(x)} = a\ (a \ge 0) \Leftrightarrow f(x) = a^2; \qquad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \ge 0$$

$$\sqrt[3]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^3; \qquad \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2; \\ g(x) \ge 0; \end{cases} \qquad \sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^3.$$

Алгоритм:

1. Свести решение иррационального уравнения к рациональному, путём возведения в степень обеих частей уравнения или заменой переменной.
2. При возведении в чётную степень обеих частей уравнения могут возникнуть посторонние корни, поэтому необходимо выполнить проверку или иногда удобнее определить ОДЗ.

<u>Пример:</u>

1. $\sqrt{61 - x^2} = 5$;	Возведем обе части уравнения в квадрат и решим полученное

$\left(\sqrt{61-x^2}\right)^2 = 5^2;$ $61 - x^2 = 25;$ $-x^2 = 25 - 61;$ $-x^2 = -36;$ $x^2 = 36;$ $x = \pm\sqrt{36};$ $x = \pm 6.$ ***Проверка:*** ***1)*** $\boldsymbol{x = 6}$; $\sqrt{61 - 6^2} = 5;$ $\sqrt{61 - 36} = 5;$ $\sqrt{25} = 5$ (верно); ***2)*** $\boldsymbol{x = -6}$; $\sqrt{61 - (-6)^2} = 5;$ $\sqrt{61 - 36} = 5;$ $\sqrt{25} = 5$ (верно); Ответ: $\boldsymbol{-6; 6}$.	уравнение. Так как мы возвели обе части уравнения в чётную степень, то могут возникнуть посторонние корни, поэтому проведём проверку, подставив в первоначально заданное уравнение полученные корни.
2. $\sqrt{2x-1} = x - 2;$ $(\sqrt{2x-1})^2 = (x-2)^2;$ $2x - 1 = x^2 - 4x + 4;$ $x^2 - 4x + 4 - 2x + 1 = 0;$ $x^2 - 6x + 5 = 0;$ $D = b^2 - 4ac = (-6)^6 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16;$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};\ x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2};$ $x_1 = 5;$ $x_2 = 1$ -посторонний корень.	Возведем обе части уравнения в квадрат и решим полученное квадратное уравнение. При возведении в квадрат правой части используем формулу сокращённого умножения: $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}.$ Так как мы возвели обе части уравнения в чётную степень, то могут возникнуть посторонние корни. В данном уравнении Лучше посторонние корни выявить,

ОДЗ: $x-2>0;$ $x>2.$ Ответ: **5**.	определив О.Д.З.

Решить иррациональные уравнения:

1) $\sqrt{x^4+19}=10;$
2) $\sqrt[3]{x^2-28}=2$
3) $\sqrt{x+1}=x-5;$
4) $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{x+9}.$
5) $\sqrt[3]{x^2-5x-14-x^3}+x=0,$

Самостоятельная работа

«Иррациональные уравнения»

Вариант I

1. Решить иррациональное уравнение:

   a)$\sqrt{x^3+37}=8;$

   b) $2x-3=\sqrt{3x^2-4x+2}.$
2. Решить уравнение: $\sqrt{3x^2-4x-2}=\sqrt{2x^2-2x+1}.$
3. Решить уравнение: $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{x-1}.$
4. Решить систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6.\end{cases}$

Вариант II

1. Решить иррациональное уравнение:

   a)$\sqrt{x^6-36}=10;$

   b)$8-3x=\sqrt{x+2};$
2. Решить уравнение: $\sqrt{3x^2-2x+1}=\sqrt{2x^2-6x+13}.$
3. Решить уравнение: $\frac{x-1}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x-5}.$

4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{x-y+5}=3, \\ \sqrt{x+y-5}=-2x+11. \end{cases}$

Контрольная работа № 3
«Корни и степени»
Вариант – I

1. Найти значение числового выражения:

а) $\sqrt[3]{-27}\cdot\sqrt[4]{625}$; б) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}$.

2. Упростить выражение: а) $\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}$;

б) Упростить выражение $\frac{2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-3a^{-\frac{1}{3}}}$ и вычислить его значение при а=4;

3. Решить уравнение:

a) $\sqrt{2x-1}=2$;

b) $\sqrt{2x^2+7}-2=x$.

4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{x+3y+6}=2, \\ \sqrt{2x-y+2}=1. \end{cases}$

Вариант – II

1. Найти значение числового выражения:

а) $\sqrt[7]{-1287}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; б) $\sqrt[5]{64}:2^{-\frac{1}{5}}\cdot\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{6}$.

2. Упростить выражение: а) $\frac{x^{\frac{1}{2}}-25}{x^{\frac{1}{4}}+5}$;

б) Упростить выражение $\frac{a^{\frac{7}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}$ и вычислить его значение при а=2.

3. Решить уравнение:

a) $\sqrt{3x-1}=5$.

b) $\sqrt{5-x^2}+x=3$.

4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{x+y-3}=1, \\ \sqrt{3x-2y+1}=2. \end{cases}$

Решение показательных уравнений

Для любых действительных значений x и y справедливы равенства:

$$a^x a^y = a^{x+y};$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$
$$(ab)^x = a^x b^x;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$
$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Решить уравнения:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5;$
2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-7} = 36^{x-3}$;
3) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0.$

<u>Пример:</u>

Решить показательные уравнения:	
1)$7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5;$ $7^x \cdot 7^2 - 14 \cdot 7^x = 5;$ $7^x(7^2 - 14) = 5;$ $7^x \cdot (49 - 14) = 5;$ $7^x \cdot 35 = 5;$ $7^x = \frac{5}{35};$ $7^x = \frac{1}{7};$ $7^x = 7^{-1};$ $x = -1.$ ***Ответ: -1***	Для выражения $\mathbf{7^{x+2}}$ применим свойство степеней $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, получим $\mathbf{7^{x+2} = 7^x \cdot 7^2}$**.** Выносим общий множитель $\mathbf{7^x}$ за скобки. Полученное уравнение решаем. Получили $7^x = 7^{-1}.$ Так как основания равны, 7=7, то приравниваем показатели степеней, следовательно $x = -1.$
2)$\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-7} = 36^{x-3}$; $6^{-1(4x-7)} = 6^{2(x-3)}$ $-1(4x-7) = 2(x-3)$ $-4x + 7 = 2x - 6;$ $-4x - 2x = -6 - 7;$ $-6x = -13;$ $x = \frac{-13}{-6};$ $x = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}.$ ***Ответ:*** $\mathbf{2\frac{1}{6}}$.	***Приводим и левую и правую части уравнения к общему основанию.*** Так как основания равны, 6=6, то приравниваем показатели степеней. Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые.
3)$49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0.$ $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0;$	Представим 49=7^2. Введём новую переменную.

$t^2 - 8t + 7 = 0;$ $a = 1, b = -8, c = 7$ $D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36;$ $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 \pm 6}{2};$ $t_1 = \frac{14}{2} = 7; \quad t_2 = \frac{2}{2} = 1.$ 1)$7^x = t_{1;}$ $7^x = 7;$ $\mathbf{x = 1}$. 2)$7^x = t_{2;}$ $7^x = 1;$ $7^x = 7^0;$ $\mathbf{x = 0}$. ***Ответ: 0; 1***	Обозначим $7^x = t$. Получим квадратное уравнение, корни которого находятся через дискриминант. Получили $t_1 = 7; \quad t_2 = 1.$ Теперь возвращаемся к обозначению.

Решить показательные уравнения:

1) $3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 36;$
2) $49^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^x;$
3) $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0.$
4) $9 \cdot 81^{1-2x} = 27^{2-x};$
5) $\frac{6^{x^2}}{3^2} = \frac{2^2}{6^{8-5x}}.$

Самостоятельная работа

«Решение показательных уравнений»

Вариант I Решить уравнения:	Вариант II Решить уравнения:
A: 1) $9^{-x} = 27;$ 2) $3^{x+2} + 3^x = 30;$ 3) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0.$	**A:** 1) $8^{-x} = 16;$ 2) $3^x + 4 \cdot 3^{x+1} = 13;$ 3) $9^x - 2 \cdot 3^x = 63.$
B: 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x-1} = 4^{x-3};$ 2) $3^{x^2-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-1}.$	**B:** 1) $3^{x^2-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1};$ 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-4} = 2^{x^2+1}.$

C: 1) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5^{x-2}$; 2) $3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 69$.	**C:** 1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-2} = 1\frac{7}{9}$; 2) $5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-2} = 122$.

Решение показательных неравенств

Решение простейших показательных неравенств основано на известном свойстве функции $y = a^x$: эта функция возрастает при a>1 и убывает при 0<a<1.

1. Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется *показательным.*
2. Решение показательных неравенств вида $a^{f(x)} < a^{g(x)}$(где a>0, a≠1) основано на следующих утверждениях:
   a) Если $a > 1$, т.е. функция $y = a^x$ возрастает, то неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.
   b) Если $0 < a < 1$, т.е. функция $y = a^x$ убывает, то неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$.

Решить неравенства:

1)$3^{2-x} < 27$;

2)$0{,}3^{7+4x} \geq 0{,}027$;

3)$\left(\frac{1}{25}\right)^{2-x} < 125^{x+1}$

<u>Пример:</u>

1)$3^{2-x} < 27$; $3^{2-x} < 3^3$; функция $y = 3^x \uparrow$, т.к. $3 > 1$; $2 - x < 3$; $-x < 3 - 2$; $-x < 1$; $x > \frac{1}{-1}$; $x > -1$; $x \epsilon (-1;\ +\infty)$. Ответ: $(-1;\ +\infty)$.	1)Приводим левую и правую части неравенств к одному и тому же основанию. 2) Рассматриваем показательную функцию, функция возрастает, следовательно при сравнивании показателей степеней знак неравенства не меняется. 3) Решаем полученное неравенство.
2)$0{,}3^{7+4x} \geq 0{,}027$; $0{,}3^{7+4x} \geq 0{,}3^3$; функция $y = 0{,}3^x \downarrow$, т.к. $0 < 0{,}3 < 1$; $7 + 4x \leq 3$;	1)Приводим левую и правую части неравенств к одному и тому же основанию. 2) Рассматриваем показательную функцию, функция убывает, следовательно при

$4x \le 3 - 7;$ $4x \le -4;$ $x \le \frac{-4}{4};$ $x \le -1.$ $x \in (-\infty; -1].$ Ответ: $(-\infty; -1]$	сравнивании показателей степеней знак неравенства меняется на противоположный. 3) Решаем полученное неравенство.
3)$\left(\frac{1}{25}\right)^{2-x} < 125^{x+1};$ $5^{-2(2-x)} < 5^{3(x+1)};$ функция $y = 5^x \uparrow$, т.к. $5 > 1;$ $-2(2-x) < 3(x+1);$ $-4 + 2x < 3x + 3;$ $2x - 3x < 3 + 4;$ $-x < 7;$ $x > -7;$ $x \in (-7; \infty).$ Ответ: $(-7; \infty).$	

Решить неравенства:

1) $\frac{1}{81} \le 27^{x+4};$
2) $0{,}25^{x-3} \ge 16^{7x-3};$
3) $\left(\frac{7}{12}\right)^{-2x+3} > \left(\frac{12}{7}\right)^{3+2x};$
4) $(0{,}09)^{5x-1} < 0{,}3^{x+7};$
5) $2^{3x+6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1};$
6) $11^{2x^2+3x} \le 121;$
7) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36.$
8) Найти все целые решения неравенства: $\frac{1}{27} \le 3^{2-x} < 27.$

Самостоятельная работа

«Решение показательных неравенств»

Вариант I	**Вариант II**

1)Решить показательные неравенства:	
а)$0{,}2^{x+4} \le 0{,}04^{2x-2}$; б)$27^{1-2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{2+x}$.	а)$0{,}4^{x+3} \ge 0{,}16^{3x-5}$; б)$\left(\frac{1}{4}\right)^{2+3x} > 8^{x-1}$.
2)Найдите все целые решения неравенства:	
$0{,}2 \le 5^{x+4} \le 125.$	$\frac{1}{6} < 6^{x-3} \le 36$
1)Решить показательные неравенства:	
$2^{x+1} + \frac{1}{2} \cdot 2^x < 5.$	$8 \cdot 2^{x-1} - 2^x > 48.$

Контрольная работа № 4
«Показательная функция. Решение показательных уравнений и неравенств»
Вариант I

1. Решить уравнения:

a) $3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 36;$

b) $49^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^x;$

c) $16^{5-3x} = 0{,}125^{5x-6};$

d) $243 \cdot (\frac{1}{81})^{3x-2} = 27^{x+3}.$

2. Решить неравенства:

a) $0{,}1^{3x+1} > 0{,}001;$

b) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2-x} < 125^{x+1};$

3. Найти все целые решения неравенства:

$0{,}5 < 2^{1-x} \le 32.$

4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x-3y} = 16. \end{cases}$

Вариант II

1. Решить уравнения:

a) $2 \cdot 5^{x+2} - 10 \cdot 5^x = 8;$

b) $25^{1-3x} = \frac{1}{25};$

c) $8^{3x+2} = 0{,}25^{x-1}$

d) $9 \cdot 81^{1-2x} = 27^{2-x};$

2. Решить неравенства:

a) $0{,}5^{2x+3} < 0{,}25;$

b) $27^{1+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{2+x}$;

3. Найти все целые решения неравенства

$6 \le 6^{1-x} < 216.$

4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2y - x = 6, \\ 9^{2x+y} = 3^{2-3y}. \end{cases}$

Решение логарифмических уравнений и систем

Основные свойства логарифмов

$$\ell og_a x + \ell og_a y = \ell og_a xy;$$

$$\ell og_a x - \ell og_a y = \ell og_a \frac{x}{y};$$

$$p\,\ell og_a x = \ell og_a x^p$$

<u>Алгоритм решения :</u>

Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ основано на том, что такое уравнение равносильно $f(x) = g(x)$ при дополнительных условиях $f(x) > 0, g(x) > 0.$

Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения в общем случае является необязательной. Можно выявить посторонние корни и с помощью нахождения области определения (область определения задаётся системой неравенств $f(x) > 0, g(x) > 0$).

Решить уравнения:

<u>Пример:</u>

1) $\log_2(2x+1) = 4;$

$\log_2(2x+1) = \log_2 16;$

$\begin{cases} 2x+1 = 16; \\ 2x+1 > 0; \end{cases} \begin{cases} 2x = 16-1, \\ 2x > -1; \end{cases} \begin{cases} 2x = 15, \\ x > -\frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = 7{,}5, \\ x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ: 7,5.

2) $\log_3(5x-6) = \log_3 2 + 3;$

$\log_3(5x-6) = \log_3 2 + \log_3 27;$

$\log_3(5x-6) = \log_3(2 \cdot 27);$

$\log_3(5x-6) = \log_3 54;$

$\begin{cases} 5x-6 = 54, \\ 5x-6 > 0; \end{cases} \begin{cases} 5x = 54+6, \\ 5x > 6; \end{cases} \begin{cases} 5x = 60, \\ x > \frac{6}{5}; \end{cases} \begin{cases} x = 60:5, \\ x > \frac{6}{5}; \end{cases} \begin{cases} x = 12; \\ x > \frac{6}{5}. \end{cases}$

Ответ: 12.

3) $\log_3(x-2)+\log_3(x+2)=\log_3(2x-1)$;

$\log_3(x-2)\cdot(x+2)=\log_3(2x-1)$;

$(x-2)\cdot(x+2)=(2x-1)$;

$x^2-4=2x-1$;

$x^2-2x-3=0$;

$x_1=3; x_2=-1$ – посторонний корень.

ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0; \\ x+2>0; \\ 2x-1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>2; \\ x>-2; \\ x>\frac{1}{2}. \end{cases}$ $x\epsilon(2;\infty)$.

Ответ: 3.

Решить уравнения:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)=-2$;
2) $\log_\pi(x^2+2x+3)=\log_\pi 6$;
3) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$;
4) $lg^2x-lgx^2+1=0$;
5) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)=-1$;
6) $\log_4\frac{4+2x}{x-5}=2$;
7) $\log_2(9-2^x)=3-x$;
8) $lg(x^2+2x-7)-lg(x-1)=0$.

Самостоятельная работа

«Решение логарифмических уравнений»

	Решить уравнения:
A	1) $\log_2(2x-1)=3$; 2) $\log_2(2x+1)=\log_2 3+1$; 3) $\log_2(7x-4)=2+\log_2 13$.
B	1) $2\log_3 2-\log_3(x-1)=1+\log_3 5$; 2) $\log_2 3-\log_2(2-3x)=2-\log_2(4-3x)$; 3) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x-5)=-4$.
C	1) $\log_5\frac{1-2x}{x+3}=1$; 2) $log_{3x}^2-2\log_3 x-3=0$; 3) $\log_2(25^{x+3}-1)=2+\log_2(5^{x+3}+1)$;

Решение логарифмических систем уравнения

Пример:

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x+4y=16, \\ \log_7 y-\log_7 4=\log_7(x+1). \end{cases}$

Решение. Данная система равносильна: $\begin{cases} x=16-4y, \\ \log_7 \frac{y}{4}=\log_7(x+1), \\ x+1>0,\ y>0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=16-4y, \\ \frac{y}{4}=(x+1), \\ x>-1, y>0; \end{cases}$ подставив первое уравнение во второе, получим:

$\begin{cases} x=16-4y, \\ y=4(16-4y)+4, \\ x>-1, y>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=4, \\ x>-1, y>0. \end{cases}$

Ответ: (0;4).

Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x-y=7, \\ \log_2(2x+y)=\log_2 8. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x-y=2, \\ \log_{12} 3+\log_{12} x=\log_{12}(y+1). \end{cases}$

Решить самостоятельно

1. $\begin{cases} 2x+y=15, \\ \log_2(x-3y)=\log_2 4. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x+y=-10, \\ \log_3(3y-x)=\log_3 9 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x+y=15, \\ x-3y=\log_2 144-\log_2 9. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \log_2(x+1)=\log_2\left(y+\frac{1}{4}\right), \\ \log_2 x-2\log_2(y-\frac{1}{2}). \end{cases}$

Контрольная работа № 5

«Логарифмы. Логарифмическая функция. Решение логарифмических уравнений и неравенств»

Вариант I

1. Найдите область определения функции: $y = lg\frac{x+1}{2x-1}$.
2. Решить уравнение:
$\log_3(4-2x) - \log_3 2 = 2.$
3. Решить неравенства:
$a)\ \log_5(1-3x) < 2;$ б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) \geq -2.$
4. Решить уравнение и неравенство:
   a) $\log_3(x-2) + \log_3(x+2) = \log_3(2x-1)$;
   b) $\log_{0,4}(12x+2) \geq \log_{0,4}(10x+16).$
5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x - y = 7, \\ \log_2(2x+y) = 3. \end{cases}$

Вариант II

1. Найдите область определения функции: $y = lg\frac{3x+1}{1-3x}$.
2. Решить уравнение:
$\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) = -2.$
3. Решить неравенства:
$a)\ \log_3(2x-1) < 3;$ б) $\log_{\frac{1}{4}}(3x-5) > -3.$
4. Решить уравнение и неравенство:
   a) $\log_{0,4}(x+2) + \log_{0,4}(x+3) = \log_{0,4}(1-x)$;
   b) $\log_2(5x-9) \leq \log_2(3x+1).$
5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 4x + y = -10, \\ \log_3(3y-x) = 2. \end{cases}$

Контрольная работа №6
«Производная показательной, логарифмической и степенной функции»
ВАРИАНТ I

1. *а) Дана функция* $f(x) = e^x \cdot \cos x$. *Найдите* $f'(x)$; $f'(0)$;
   б) дана функция $f(x) = 4\ln x$. *Найдите* $f'(x)$; $f'(2)$;
   в) дана функция $f(x) = 3^x \cdot \sin x$. *Найдите* $f'(x)$; $f'(0)$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$.

3. Исследуйте функцию на возрастание (убывание) и на экстремумы:
$f(x) = 2x \cdot \ln x.$

ВАРИАНТ II

1. *а) Дана функция* $f(x) = e^x \cdot \sin x$. *Найдите* $f'(x)$; $f'(0)$;
   б) дана функция $f(x) = \frac{1}{2}\ln x + 3$. *Найдите* $f'(x)$; $f'\left(\frac{1}{4}\right)$;
   в) дана функция $f(x) = 2^x \cdot \cos x$. *Найдите* $f'(x)$; $f'(0)$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$, $y = 1$, $x = 4$.

3. Исследуйте функцию на возрастание (убывание) и на экстремумы: $f(x) = x \cdot e^x$.

Тела и поверхности вращения

Цилиндр	Конус
$S_{пол} = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн} = \pi R^2$ $S_{бок} = 2\pi RH$	$S_{пол} = S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн} = \pi R^2$ $S_{бок} = \pi Rl$

Цилиндр. Решение задач

1. Площадь осевого сечения цилиндра равна 108 см^2, а его образующая в три раза меньше диаметра основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
2. Радиус основания цилиндра равен 6 см, высота в два раза меньше длины окружности основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 см и наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 30^0. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
4. Радиус основания цилиндра равен 8см, площадь боковой поверхности вдвое меньше площади основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Решить самостоятельно

1) Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 10см и 8 см вокруг прямой проходящей через середины его меньших сторон.
2) Высота цилиндра равна 6см, а площадь его боковой поверхности вдвое меньше площади его полной поверхности. Найдите площадь основания цилиндра.
3) Отрезок, соединяющий конец диаметра нижнего основания цилиндра с центром его верхнего основания, равен 2см и наклонён к плоскости основания под углом 30^0. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Решить задачи:

1. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 8см. и 12см. вокруг прямой, проходящей через середины его больших сторон.

2. Образующая конуса равна 10см и составляет с плоскостью основания угол 45^0. Найдите площадь полной поверхности.

3. Диагональ осевого сечения цилиндра равняется 16см и наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите высоту цилиндра и площадь основания.

4. Прямоугольный треугольник с катетами 3см и 4см в первый раз вращается вокруг большего катета, а второй – вокруг меньшего. Сравните площади боковых поверхностей получающихся при этом конусов

Цилиндр и конус

Решить задачи

1. Высота конуса равна 12см, а угол при вершине осевого сечения равен 120^0. Найдите образующую и радиус конуса.
2. Высота конуса равна 4см, а его образующая 5см. Найдите площадь полной поверхности конуса.
3. Осевое сечение цилиндра – квадрат со стороной 6 см. Найти высоту и радиус основания цилиндра, площадь боковой поверхности.
4. Радиус основания цилиндра равен 2м, высота 3м. Найти диагональ осевого сечения.
5. Длина окружности основания цилиндра равна 1. Площадь боковой поверхности равна 2. Найдите высоту цилиндра.
6. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48. Угол между этой диагональю и образующей равен 30^0. Найдите радиус цилиндра и боковую поверхность.

Самостоятельная работа

Вариант I	***Вариант II***
1.Высота конуса 12 см, образующая – 13 см. Найти площадь полной поверхности конуса.	1.Высота конуса 12см, радиус равен 5см. Найдите площадь полной поверхности конуса.
2.Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 45^0, а радиус основания равен 8см. Найдите образующую и боковую поверхность конуса.	2.Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 60^0 и равна 12см. Найдите радиус основания и боковую поверхность конуса.
3.Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 4см и 7 см, вокруг большего катета.	3.Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 3см и 6 см, вокруг большего катета.

Тест «Цилиндр и конус»

1. Радиус основания цилиндра равен 3см, а высота 5см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
   1)15П см, 2)30П $см^2$ 3)11П см 4)30П см

2. Образующая конуса равна 13см, а высота равна 12см. Найдите радиус основания конуса.

   1)5 см 2)1 см 3)25 см 4)6 см

3. Образующая цилиндра равна 8см, а диаметр 6см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

1) 48П $см^2$ 2)24П $см^2$ 3)66П $см^2$ 4)22П $см^2$

4. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45^0 и равна 12см. Найдите радиус цилиндра.

1) $12\sqrt{2}$ *см* 2) $24\sqrt{2}$ *см* 3) $4\sqrt{2}$ *см* 4) $6\sqrt{2}$ *см* .

Измерения в геометрии

—Нахождение объемов куба, параллелепипеда, призмы
—Нахождение объёма пирамиды
—Нахождение объемов цилиндра, конуса и шара
—Нахождение площади поверхности цилиндра, конуса и шара

Самостоятельная работа
«Прямоугольный параллелепипед»
Вариант I

1. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания 3см и 4см. Боковое ребро равно 5см. Найдите объём и площадь полной поверхности параллелепипеда.

2. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 408 $см^2$, стороны основания 9см и 6см. Вычислите объём прямоугольного параллелепипеда.

3. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 136 $см^2$, стороны основания 4см и 6см. Вычислите диагональ прямоугольного параллелепипеда.

Вариант II

1. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания 4см и 5см. Боковое ребро равно 7см. Найдите объём и площадь полной поверхности параллелепипеда.

2. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 136 $см^2$, стороны основания 4см и 6см. Вычислите объём прямоугольного параллелепипеда.

3. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 408 $см^2$, стороны основания 9см и 6см. Вычислите диагональ прямоугольного параллелепипеда.

Самостоятельная работа
«Объём прямоугольного параллелепипеда»
Вариант I

1. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 152 $см^2$, стороны основания 6см и 8 см. Вычислите объём прямоугольного параллелепипеда.
2. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 108$см^3$, площадь основания 27$см^2$. Одна сторона основания в три раза больше другой. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

3. В прямом параллелепипеде стороны основания 2см и 6см образуют угол в 30^0. Боковая поверхность равна 64см^2. Найдите объём прямоугольного параллелепипеда.

Вариант II

1. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 190см^2, стороны основания 5см и 7см. Вычислите объём прямоугольного параллелепипеда.
2. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 150см^3, площадь основания 75см^2. Одна сторона основания в три раза больше другой. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.
3. В прямом параллелепипеде стороны основания 4см и 5см образуют угол в 30^0. Боковая поверхность равна 90см^2. Найдите объём прямоугольного параллелепипеда.

«Объём призмы и пирамиды»

<u>Ответить на вопросы:</u>

1. Как называется фигура, состоящая из двух равных многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях, и n параллелограммов?
2. Как называется отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани?
3. У какой призмы боковые ребра перпендикулярны к основаниям?
4. Что выражается этой формулой $S_{бок.} + 2S_{осн.}$?
5. Как называется высота боковой грани правильной пирамиды?
6. Что выражается этой формулой $S_{бок.} + S_{осн.}$?
7. Какой многоугольник лежит в основании правильной призмы?
8. По какой формуле вычисляется объем пирамиды?
9. Как называется фигура, состоящая из многоугольников и n треугольников?
10. Как называются концы ребер?
11. Какой многогранник лежит в основании правильной пирамиды?
12. Что у прямой призмы может являться высотой?
13. Что вычисляется по этой формуле $P_{осн.} * H$?
14. Как называется перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания.
15. Какая фигура является боковой гранью усеченной пирамиды?
16. По какой формуле вычисляется объем призмы?
17. Какая фигура является боковой гранью пирамиды, правильной пирамиды?

Самостоятельная работа

1. Вычислите объём прямой призмы, в основании которой квадрат со стороной 2м, а высота призмы равна 4м.
2. В правильной четырёхугольной пирамиде со стороной 10см, высота равна 12 см. Вычислить объём пирамиды.
3. Вычислите объём треугольной призмы со сторонами основания 40 см, 37см, 13см и высотой 50см.

4. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4см, а боковое ребро равно $\sqrt{17}$ см.
5. Вычислите объём правильной треугольной пирамиды со стороной 6 дм и высотой пирамиды 8 дм.
6. В правильной четырёхугольной пирамиде площадь боковой поверхности равна 32см^2, а площадь полной поверхности равна 40см^2. Найдите объём призмы.
7. Основанием прямой призмы является ромб, диагонали которого равны 3см и 6см. Большее диагональное сечение призмы равно 48 см^2. Вычислите объём призмы.

Самостоятельная работа

«Объём цилиндра и конуса»

Вариант I	***Вариант II***
А.1. Образующая конуса равна 10см, площадь его боковой поверхности равна 80πсм^2. Найдите объём цилиндра. 2. Отрезок, соединяющий конец нижнего основания цилиндра с центром его верхнего основания, равен 4см и наклонён к плоскости основания под углом 30^0. Найдите объём цилиндра.	**А.**1. Образующая конуса равна 10см, площадь его боковой поверхности равна 60πсм^2. Найдите объём цилиндра. 2. Отрезок, соединяющий конец нижнего основания цилиндра с центром его верхнего основания, равен 6см и наклонён к плоскости основания под углом 60^0. Найдите объём цилиндра.
В. 3. Найдите образующую конуса, объёмом 100π и высотой 12.	
С. 4. Квадрат со стороной 3см вращается вокруг своей диагонали. Найдите объём тела вращения.	

Самостоятельная работа

(Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса)

Вариант I	**Вариант II**
1. Образующая конуса равна 6см, площадь основания 25π см^2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.	1.Образующая конуса равна 7см, площадь основания 36π см^2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12см и наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.	2.Диагональ осевого сечения цилиндра равна 16см и наклонена к плоскости основания под углом 60^0. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
3. Прямоугольный треугольник,	3. Прямоугольный треугольник, гипотенуза

	гипотенуза которого равна 10см, а один из катетов 6см, вращается вокруг своего большего катета. Найдите площадь полной поверхности и высоту тела вращения.	которого равна 10см, а один из катетов 6см, вращается вокруг своего большего катета. Найдите площадь полной поверхности и высоту тела вращения.

Задание №1. Заполнить таблицу:

Формула	**Площадь основания**	**Площадь боковой поверхности**	**Площадь полной поверхности**	**Объём**
Цилиндр				
Конус				

Задание №2.

1) Высота конуса равна 12см, а диаметр основания 10см.Найдите площадь полной поверхности и объем конуса.
2) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен 60 см^3.

Задание №3.

Из формулы объёма цилиндра выразить:

a) высоту,
b) радиус.

Тест «Тела вращения»

1. Диаметр основания цилиндра 4 см, высота 3 см. Найти диагональ осевого сечения.

А) 5 см В) 4 см С) 6 см D) 10 см Е) 12 см

2. Если увеличить радиус основания цилиндра в 2 раза, то во сколько раз увеличится его объем?

А) 2 В) 3 **С) 4** D) 5 Е) 6

3. Высота цилиндра 2 см., радиус основания 3 см. Определить объем.

А) 18π см^3 В) 1,8π см^3 С) 16π см^3 D) 20π см^3 Е) 2π см^3

4. Радиус основания цилиндра равен 3 см, высота – 4 см. Цилиндр пересечен плоскостью, перпендикулярной оси и отстоящей на 1 см от нижнего основания. Найти площадь сечения.

А) 25 π см^2 В) 16 π см^2 **С) 9 π см^2** D) 3 π см^2 Е) 4 π см^2

5. Осевое сечение цилиндра – квадрат со стороной 6 см. Найти высоту и радиус основания цилиндра.

А) 5 см и 1 см В) 4 см и 2 см С) 6 см и 6 см **D) 6 см и 3 см** Е) 3 см и 6 см

6. Высота конуса 4 см, радиус основания – 3 см. Найти образующую конуса.

А) 5 см В) 4 см С) 6 см D) 10 см Е) 12 см

7. Осевое сечение конуса – треугольник, все стороны которого равны 10 см. Найти угол наклона образующей к плоскости основании конуса.

А) 90^0 **В) 60^0** С) 45^0 D) 30^0 Е) 25^0

8. Высота конуса 12 см, образующая – 13 см. Найти боковую поверхность конуса.

А) 12 π см^2 В) 13 π см^2 С) 15 π см^2 D) 24 π см^2 **Е) 65 π см^2**

9. Найти объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см вокруг меньшего катета.

A) 16π см^3 B) 24 π см^3 C) 12 π см^3 D) 9 π см^3 E) 48 π см^3

10. Образующая конуса 5 см и наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Определить высоту конуса.

A) 5 см B) 4 см C) 6 см D) 10 см **E) 2,5 см**

Контрольная работа № 7
«Тела и поверхности вращения»
ВАРИАНТ – I

1. Подтвердить или опровергнуть следующие утверждения.

   a) При вращении прямоугольника около стороны как оси получаем цилиндр.

   b) Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания называются образующими конуса.

   c) Осевым сечением цилиндра является треугольник.

   d) Высота цилиндра (прямого) больше образующей.

   e) При вращении полукруга вокруг его диаметра как оси получается шар.

   f) Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле S = $2\pi(r+h)$, где r –радиус цилиндра, h-высота цилиндра

2. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6см. и 8см. вокруг прямой, которая проходит через середины его меньших сторон.
3. Образующая конуса равна 12см. и составляет с плоскостью основания угол 30^0. Найдите площадь полной поверхности.
4. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $8\sqrt{2}$ см. Найти площадь полной поверхности.

ВАРИАНТ – II

1. Подтвердить или опровергнуть следующие утверждения.

   a) При вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси получаем конус.

   b) Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов называются образующими цилиндра.

   c) Осевым сечением конуса является прямоугольник.

   d) Высота конуса равна образующей.

   e) Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется диаметром шара.

   f) Все образующие цилиндрической поверхности параллельны друг другу.

2. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 4см. и 6см. вокруг прямой, проходящей через середины его больших сторон.
3. Радиус основания конуса равен 5см., а образующая конуса 13см.Найдите площадь полной поверхности конуса.

4. Диагональ осевого сечения цилиндра равняется 32см. и наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите высоту цилиндра и площадь основания.

Контрольная работа № 8
«Измерения в геометрии»
Вариант I

1. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6м и 8м, все боковые ребра равны 13м. Найдите объем пирамиды.
2. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – равнобедренный треугольник со сторонами AB=AC=17см, BC=8см. Угол между плоскостью, содержащей прямую BC и вершину A_1, и плоскостью основания равен 30^0. Найдите объем призмы.
3. Найдите объём тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6см и 10 см вокруг прямой, которая проходит через середины его меньших сторон.
4. Высота конуса равна 5см, объём 15π см^3. Найдите площадь полной поверхности конуса.
5. Образующая конуса равна 12см и составляет с плоскостью основания угол 30^0. Найдите объём конуса.
6. Радиус основания цилиндра равен 12см, площадь боковой поверхности вдвое меньше площади основания. Найдите площадь полной поверхности.

Вариант II

1. Одно ребро треугольной пирамиды равно 4см, каждое из остальных 3см. Найдите объем пирамиды.
2. В прямом параллелепипеде стороны основания 6см и 8см образуют угол 30^0. Площадь боковой поверхности равна 140 см^2. Найдите объем параллелепипеда.
3. Найдите объём тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6см и 4 см вокруг прямой, которая проходит через середины его больших сторон.
4. Высота конуса равна 6см, объём 18π см^3. Найдите площадь полной поверхности конуса.
5. Образующая конуса равна 8см и составляет с плоскостью основания угол 60^0. Найдите объём конуса.
6. Радиус основания цилиндра равен 16см, площадь боковой поверхности вдвое меньше площади основания. Найдите площадь полной поверхности.

Контрольная работа №9
«Уравнения и неравенства»

Вариант – I

1. Решить неравенство:
$$\frac{x+3}{x^2-36} \geq 0.$$
2. Решить уравнение: $a)\sqrt{2x-1} = 2.$

б) $\sqrt{2x^2+7} - 2 = x.$

3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{x+3y+6} = 2, \\ \sqrt{2x-y+2} = 1. \end{cases}$
4. Решить неравенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x-2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x-10}}$.

Вариант – II

1. Решить неравенство:
$$\frac{49-x^2}{5-x}<0.$$

2. Решить уравнение: а) $\sqrt{3x-1}=5.$

б) $\sqrt{5-x^2}+x=3.$

3. Решить систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt{x+y-3}=1,\\ \sqrt{3x-2y+1}=2.\end{cases}$

4. Решить неравенство: $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{x+4}}>\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}.$

Итоговая контрольная работа №10
ВАРИАНТ – I

1. Решите неравенство $\frac{16x^2-x}{12-x}<0$.
2. Решите уравнения: а) $\sin x+\sin(\pi+x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=1$;

   б) $4^{5x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{6-4x}$;

   в) $\lg(2-x)=2\lg 4-\lg 2$.
3. Решите неравенства: а) $10^{3x+1}>0{,}001$;

   б) $\log_3(2x-1)<3$.

4. Найдите первообразную функции $f(x)=4-x^2$, график которой проходит через точку (-3; 10).

5. Основанием призмы является прямоугольный треугольник с острым углом 60^0 и катетом, прилежащим к этому углу, равным 9 см. Высота призмы равна 10 см. Найдите:
   а) объём призмы;
   б) площадь полной поверхности призмы.

ВАРИАНТ – II

1. Решите неравенство $\frac{3x+12x^2}{x+4}>0$.
2. Решите уравнения: а) $\sin x+\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-1$;

   б) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x+1}=36^{x-1}$;

   в) $\log_3(4-2x)-\log_3 2=2$.

3. Решите неравенства: а) $32^{2x+3} < 0{,}25$;

б) $\log_7(2x-1) < 2$.

4. Найдите первообразную функции $f(x) = 5x + 7$, график которой проходит через точку (-2; 4).

5. В правильной четырёхугольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30^0, а основание равно 6 см. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) площадь полной поверхности пирамиды.

4.КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

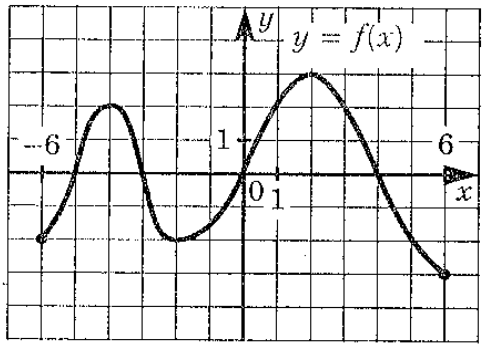
Предметом оценки являются умения и знания, частично сформированные знания, умения и общие компетенции. Оценка осуществляется в форме дифференцированного зачёта.

Экзамен проводится в письменной форме.

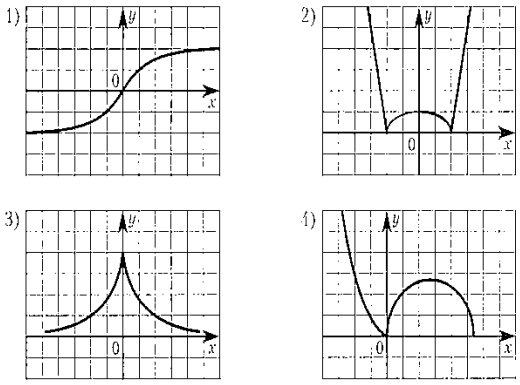
4.1Задания для проведения дифференцированного зачёта (I семестр)

Вариант I

1. Вычислить: $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}$.
2. Упростить: $\frac{1}{cos^2 x} - 1$.
3. Найти $\cos\alpha,\ tg\alpha,\ \cos 2\alpha,$ если $\sin\alpha = \frac{5}{13}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
4. Исследовать функцию по общей схеме:

	Определить: a) область определения и область значения функции; b) чётность, нечётность; c) точки пересечения с осями координат; d) промежутки знакопостоянства; e) промежутки возрастания, убывания функции; f) точки экстремума, экстремумы функции.

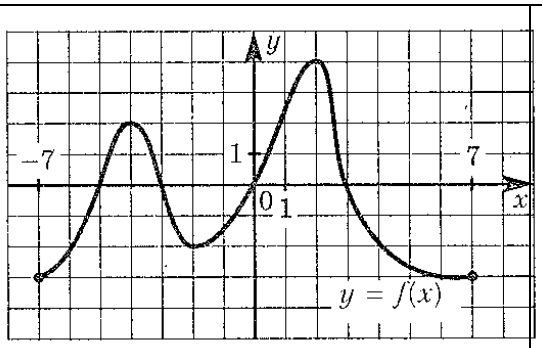
5. Найдите значение функции $f(x) = 2\cos\frac{x}{3}$ в точке $\boldsymbol{\pi}$.
6. Найди значение выражения: $arccos\frac{1}{2} + arcsin\frac{1}{2}$.
7. Решить уравнения:
   a) $2\cos x - \sqrt{2} = 0$;
   b) $tg4x = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
   c) $2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$.
8. Решить уравнение: $cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$.
9. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
10. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
11. Укажите график нечётной функции.



12. Из точки к плоскости проведены две равные наклонные длиной 4см. Найдите расстояние от точки до плоскости, если наклонные образуют угол 60^0, а их проекции перпендикулярны.

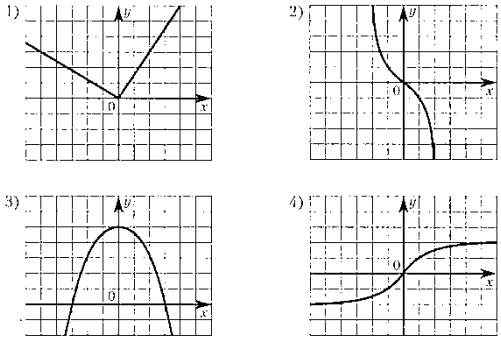
Вариант II

1) Вычислить: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$.
2) Упростить: $\frac{1}{sin^2 x} - 1$
3) Найти $\sin\alpha,\ tg\alpha,\ \sin 2\alpha,$ если $\cos\alpha = -\frac{24}{25}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
4) Исследовать функцию по общей схеме:



Определить:
a) область определения и область значения функции;
b) чётность, нечётность;
c) точки пересечения с осями координат;
d) промежутки знакопостоянства;
e) промежутки возрастания, убывания функции;
f) точки экстремума, экстремумы функции.

5) Найдите значение функции $f(x) = 2\,sin\frac{x}{6}$ в точке $\boldsymbol{\pi}$.
6) Найдите значение выражения: $arctg1 + arcsin\frac{1}{2}$.
7) Решить уравнения:
   a. $2\cos x - \sqrt{3} = 0;$
   b. $ctg\frac{x}{2} = 1;$
   c. $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0.$
8) Решить уравнение: $2sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0.$
9) Какие прямые называются скрещивающиеся?
10) Сформулируйте признак параллельности прямых.
11) Укажите график чётной функции



12) Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если одна из них на 3 см больше другой, а проекции наклонных равны 9см и 6см.

4.2Задания для проведения дифференцированного зачёта
(III семестр)
Вариант 1

*1.*Вычислить: $4 \cdot 81^{\frac{1}{4}} + 0{,}5^0$.

2.Найдите значение выражения $3^{4a} \cdot 3^{-2a}$ при $a = \frac{1}{2}$.

3. Площадь полной поверхности призмы вычисляется по формуле:

a) $2S_{бок.} + S_{осн.}$
b) $2S_{бок.} + 2S_{осн.}$
c) $S_{бок.} + S_{осн.}$
d) $S_{бок.} + 2S_{осн.}$

4. Апофема это:

a) высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины;
b) высота пирамиды;
c) высота боковой грани пирамиды;
d) нет верного ответа.

5. Сколько вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) имеет треугольная пирамида?

a) В = 4, Р = 6, Г = 4.
b) В = 6, Р = 4, Г = 6.
c) В = 6, Р = 6, Г = 4.
d) В = 4, Р = 4, Г = 6.

6.Найдите значение производной функции в точке x_0.

$f(x) = 4x^3 + 6x + 3, x_0 = 1.$

7. Найдите первообразную функции $f(x) = x^2 - 5$, график которой проходит через точку (3;4).

8. Вычислить интеграл: $\int_0^3 (3x^2 + 2)\, dx$.

9. Найдите множество первообразных для функции $f(x) = 2\cos x - 3\sin x$.

10. Решить уравнение: $\sqrt{x+8} = 2 - x$.

11. Найти значение выражения $\frac{9a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{9}{5}} + 2a^{-\frac{1}{5}}}$ при $a = 5$.

12. Решить уравнение: $4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^x = 5$.

13. Решить неравенство: $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} > 9^{2x-1}$.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 10см, а боковое ребро 13см. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 2

1.Вычислить: $2 \cdot 16^{\frac{1}{4}} - 0{,}2^0$.

2.Найдите значение выражения $2^{6a} \cdot 2^{-4a}$ при $a = \frac{1}{2}$.

3. Площадь полной поверхности пирамиды вычисляется по формуле:

a) $2S_{бок.} + S_{осн.}$
b) $2S_{бок.} + 2S_{осн.}$
c) $S_{бок.} + S_{осн.}$
d) $S_{бок.} + 2S_{осн.}$

4. Апофема это:

a) высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины;
b) высота пирамиды;
c) высота боковой грани пирамиды;
d) нет верного ответа.

5. Сколько вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) имеет треугольная пирамида?

a) В = 4, Р = 6, Г = 4.
b) В = 6, Р = 4, Г = 6.
c) В = 6, Р = 6, Г = 4.
d) В = 4, Р = 4, Г = 6.

6.Найдите значение производной функции в точке x_0.
$f(x) = 2x^3 - 7x + 5, x_0 = 2.$

7. Найдите первообразную функции $f(x) = 5x + x^2$, график которой проходит через точку (0;3).

8. Вычислить интеграл: $\int_0^2 (x^2 + 3)\, dx$.

9. Найдите множество первообразных для функции $f(x) = 2x + 5\sin x$.

10. Решить уравнение: $\sqrt{x+4} = x + 2$.

11. Найти значение выражения $\frac{a^{\frac{7}{3}} + a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}$ при $a = 2$.

12. Решить уравнение: $2^{7-5x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1} = 0$.

13. Решить неравенство: $\left(\frac{1}{25}\right)^{2-x} < 125^{x+1}$.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 8см, а боковое ребро 12см. Найдите высоту пирамиды.

4.3Задания для проведения экзамена по математике (IV семестр) по профессии: 18.01.27 Машинист технологических насосов и компрессоров

Вариант I

1. Решите неравенство: $\frac{11x^2 - x}{2 + x} \leq 0$.
2. Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{5}}(2x + 3) > -3$.

3. Решить уравнение: $\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) = 0.$

4. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 3x^2 + 18x + 7$ на промежутке $[-5;\ -1]$.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 4 - x^2$, график которой проходит через точку
(-3;10).

6. Объём конуса с радиусом основания 6 см равен 96π см^3. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

7. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 10 см, а боковое ребро – 13 см. Найдите высоту пирамиды.

8. Решить уравнение:

$$\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4.$$

9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ \dfrac{4^{x-2,5}}{4^{3y}} = 2. \end{cases}$$

10. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x - 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Вариант II

1. Решите неравенство: $\frac{8x^2 - 2}{3 - x} > 0.$

2. Решить уравнение: $36 \cdot 216^{3x+1} = 1$

3. Решить уравнение: $\sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3}.$

4. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $f(x) = x - lnx$ в его точке с абсциссой $x = 3$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 - 6x + 8$, прямыми $x = -2, x = -1$ и осью абсцисс.

6. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 24 см^3, площадь основания 12 см^2. Одна сторона основания в три раза больше другой. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

7. Высота конуса равна 5 см, а угол при вершине осевого сечения равен 120^0. Найдите объём конуса.

8. Решить уравнение:

$$2\sqrt{x^2 + 8} = 2x + 1.$$

9. Укажите все натуральные решения неравенства:
$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 8) \geq -1.$

10. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = -x^4 + 4x^2 - 3$.

4.4 Критерии оценки знаний, умений и общих компетенций при промежуточной аттестации

Инструкция для обучающихся по выполнению экзаменационной работы

На выполнение письменной экзаменационной работы по математике дается 3 астрономических часа (180 минут).

Экзаменационная работа по курсу «Математика» состоит из 10 заданий. Содержание заданий составлены из курса алгебра и начала математического анализа и геометрии.

Для получения отметки **«3»** *(удовлетворительно)* обучающийся должен правильно выполнить любые пять заданий. Отметка **«4»** *(хорошо)* выставляется при выполнении любых семи заданий. Отметка **«5»** *(отлично)* ставится за девять верно выполненных заданий.

Критерии оценивания

1) Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой. При проверке усвоения материала нужно выявлять полноту, прочность усвоения обучающимися теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

2) Основными формами проверки знаний и умений обучающихся по математике являются письменная контрольная работа, самостоятельная работа, тестирование, устный опрос.

3) При оценке письменных и устных ответов преподаватель в первую очередь учитывает показанные обучающимися знания и умения. Оценка зависит также от наличия и характера погрешностей, допущенных обучающимися.

Среди погрешностей выделяются ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что обучающийся не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или об отсутствии знаний, не считающихся в программе основными. Недочетами также считаются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного обучающимся задания или способа его выполнения; неаккуратная запись; небрежное выполнение чертежа.

Граница между ошибками и недочетами является в некоторой степени условной. При одних обстоятельствах допущенная обучающимися погрешность может рассматриваться преподавателем как ошибка, в другое время и при других обстоятельствах — как недочет.

4) Задания для устного и письменного опроса обучающихся состоят из теоретических вопросов и задач.

Ответ на теоретический вопрос считается безупречным, если по своему содержанию полностью соответствует вопросу, содержит все необходимые теоретические факты и обоснованные выводы, а его изложение и письменная запись математически грамотны и отличаются последовательностью и аккуратностью.

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно, выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

5. Оценка ответа обучающегося при устном и письменном опросе проводится по пятибалльной системе, т. е. за ответ выставляется одна из отметок: 1 (плохо), 2 (неудовлетворительно), 3 (удовлетворительно), 4 (хорошо), 5 (отлично).

6. Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им заданий.

Критерии ошибок

К грубым ошибкам относятся ошибки, которые обнаруживают незнание обучающимися формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять; незнание приемов

решения задач, рассматриваемых в учебниках, а также вычислительные ошибки, если они не являются опиской;

К негрубым ошибкам относятся: потеря корня или сохранение в ответе постороннего корня; отбрасывание без объяснений одного из них и равнозначные им;

К недочётам относятся: нерациональное решение, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решениях.

Оценка устных ответов

Ответ оценивается ***отметкой «5»,*** если обучающийся:

- полно раскрыл содержание материала в объеме, предусмотренном программой и учебником,
- изложил материал грамотным языком в определенной логической последовательности, точно используя математическую терминологию и символику;
- правильно выполнил рисунки, чертежи, графики, сопутствующие ответу;
- показал умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, применять их в новой ситуации при выполнении практического задания;
- продемонстрировал усвоение ранее изученных сопутствующих вопросов, сформированность и устойчивость используемых при отработке умений и навыков;
- отвечал самостоятельно без наводящих вопросов преподавателя. Возможны одна - две неточности при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, которые обучающийся легко исправил по замечанию преподавателя.

Ответ оценивается **отметкой «4»,** если он удовлетворяет в основном требованиям на оценку «5», но при этом имеет один из недостатков:

- в изложении допущены небольшие пробелы, не исказившие математическое содержание ответа;
- допущены один – два недочета при освещении основного содержания ответа, исправленные по замечанию преподавателя;
- допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, легко исправленные по замечанию преподавателя.

Отметка «3» ставится в следующих случаях:

- неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала (определенные «Требованиями к математической подготовке обучающихся»);
- имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании математической терминологии, чертежах, выкладках, исправленные после нескольких наводящих вопросов преподавателя;
- обучающийся не справился с применением теории в новой ситуации при выполнении практического задания, но выполнил задания обязательного уровня сложности по данной теме;
- при знании теоретического материала выявлена недостаточная сформированность основных умений и навыков.

Отметка «2» ставится в следующих случаях:

- не раскрыто основное содержание учебного материала;
- обнаружено незнание или непонимание обучающимся большей или наиболее важной части учебного материала;
- допущены ошибки в определении понятий, при использовании математической терминологии, в рисунках, чертежах или графиках, в выкладках, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов преподавателя.

Отметка «1» ставится, если:

- обучающийся обнаружил полное незнание и непонимание изучаемого учебного материала или не смог ответить ни на один из поставленных вопросов по изучаемому материалу.

Примерные нормы оценок письменных работ по математике

Единые нормы являются основой при оценке как контрольных, так и всех других письменных работ по математике. Они обеспечивают единство требований к обучающимся со стороны преподавателя. Применяя эти нормы, преподаватель должен индивидуально подходить к оценке каждой письменной работы обучающегося, обращать внимание *на качество выполнения* работы в целом, а затем уже на количество ошибок и на их характер.

Содержание и объем материала, включаемого в контрольные письменные работы, а также в задания для повседневных письменных упражнений, определяются требованиями, установленными программой. Наряду с контрольными работами по отдельным разделам темы следует проводить *итоговые контрольные работы* по всей изученной теме.

По характеру заданий письменные работы могут состоять: а) только из примеров; б) только из задач; в) из задач и примеров. Контрольные работы, которые имеют целью проверку знаний, умений и навыков обучающихся по целому разделу программы, а также по материалу, изученному за семестр или за год, как правило, должны состоять из задач и примеров.

Оценка письменной работы определяется с учетом прежде всего ее общего математического уровня, оригинальности, последовательности, логичности ее выполнения, а также числа ошибок и недочетов и качества оформления работы.

Ошибка, *повторяющаяся* в одной работе несколько раз, рассматривается как *одна ошибка.*

За орфографические ошибки, допущенные обучающимися, оценка *не снижается.* Однако ошибки в написании *математических терминов,* должны учитываться как недочеты в работе.

При оценке письменных работ по математике различают *грубые ошибки, ошибки и недочеты.* Грубыми, считаются ошибки, связанные с вопросами, включенными в *«Требования к уровню подготовки обучающихся »*. Образовательных стандартов, а также показывающие, что обучающийся не усвоил вопросы изученных новых тем, отнесенные Стандартами основного общего образования к числу обязательных для усвоения всеми учениками.

Примечание. Если грубая ошибка встречается в работе только в одном случае из нескольких аналогичных, то при оценке работы эта ошибка может быть приравнена к негрубой.

Примерами *негрубых ошибок* являются: ошибки, связанные с недостаточно полным усвоением текущего учебного материала, не вполне точно сформулированный вопрос или пояснение при решении задачи, неточности при выполнении геометрических построений и т. п.

Недочетами считаются нерациональные записи при вычислениях, нерациональные приемы вычислений, преобразований и решений задач, небрежное выполнение чертежей и схем, отдельные погрешности в формулировке пояснения или ответа в задаче. К недочетам можно отнести и другие недостатки работы, вызванные недостаточным вниманием учащихся, например: неполное сокращение дробей или членов отношения; обращение смешанных чисел в неправильную дробь при сложении и вычитании; пропуск наименований; пропуск чисел в промежуточных записях; перестановка цифр при записи чисел; ошибки, допущенные при переписывании, и т.п.

Оценка письменной работы по выполнению вычислительных заданий и алгебраических преобразований

Оценка «5» ставится за безукоризненное выполнение письменной работы, т.е.: а) если решение всех примеров верное; б) если все действия и преобразования выполнены правильно, без ошибок; все записи хода решения расположены последовательно, а также сделана проверка решения в тех случаях, когда это требуется.

Оценка «4» ставится за работу, в которой допущена одна (негрубая) ошибка или два-три недочета.

Оценка «3» ставится в следующих случаях:

1) если в работе имеется одна грубая ошибка и не более одной негрубой ошибки;
2) при наличии одной грубой ошибки и одного-двух недочетов;
3) при отсутствии грубых ошибок, но при наличии от двух до четырех (негрубых) ошибок;
4) при наличии двух негрубых ошибок и не более трех недочетов;
5) при отсутствии ошибок, но при наличии четырех и более недочетов;
6) если неверно выполнено не более половины объема всей работы.

Оценка «2» ставится, когда число ошибок превосходит норму, при которой может быть выставлена положительная оценка, или если правильно выполнено менее *половины* всей работы.

Оценка «1» ставится, если ученик совсем не выполнил работу.